

Utilisation des dérivées pour la séparation de sources

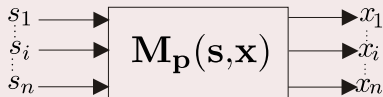
S. Lagrange^{1,2}, L. Jaulin³, C. Jutten², V. Vigneron²

¹ Université d'Angers - LISA, ² INPG-UJF - LIS, ³ ENSIETA - E3I2
<http://www.istia.univ-angers.fr/~lagrange/>

14 novembre 2004

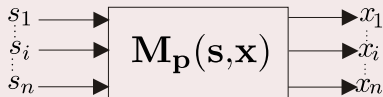
Introduction

Problème de séparation aveugle de sources



Introduction

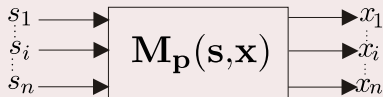
Problème de séparation aveugle de sources



- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.

Introduction

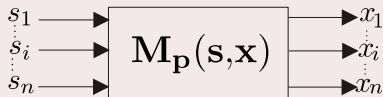
Problème de séparation aveugle de sources



- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(., .)$ modèle de mélange de forme connue.

Introduction

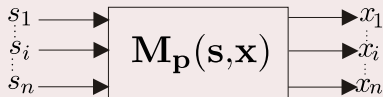
Problème de séparation aveugle de sources



- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(.,.)$ modèle de mélange de forme connue.
- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues.

Introduction

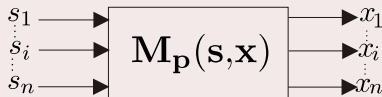
Problème de séparation aveugle de sources



- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(.,.)$ modèle de mélange de forme connue.
- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Introduction

Problème de séparation aveugle de sources



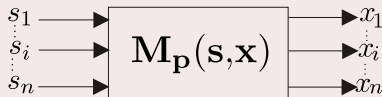
- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(., .)$ modèle de mélange de forme connue.
- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Hypothèses

- Les sources sont statistiquement indépendantes.

Introduction

Problème de séparation aveugle de sources



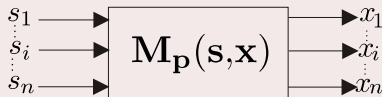
- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(., .)$ modèle de mélange de forme connue.
- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Hypothèses

- Les sources sont statistiquement indépendantes.
- Les sources sont stationnaires et ergodiques.

Introduction

Problème de séparation aveugle de sources



- $\mathbf{x}$ vecteur d'observations connues.
- $M_p(.,.)$ modèle de mélange de forme connue.
- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Hypothèses

- Les sources sont statistiquement indépendantes.
- Les sources sont stationnaires et ergodiques.

Plan de l'exposé

❶ Résultat sur l'indépendance statistique

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ Solver

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ Solver
- ➎ Séparation de mélange plat

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ Solver
- ➎ Séparation de mélange plat
- ➏ Conclusion et perspectives

Résultats sur l'indépendance statistique de signaux aléatoires

Définition de l'indépendance pour des variables aléatoires

n variables aléatoires $x_1, \dots, x_n$ sont statistiquement indépendantes si et seulement si

$$p_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(u_i).$$

Résultats sur l'indépendance statistique de signaux aléatoires

Définition de l'indépendance pour des variables aléatoires

n variables aléatoires $x_1, \dots, x_n$ sont statistiquement indépendantes si et seulement si

$$p_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(u_i).$$

Définition de l'indépendance pour des de signaux aléatoires

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$, $s_2(t)$.

$s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants si quelles que soient f et g de $\mathfrak{F}$ dans $\mathbb{R}$, on a

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $s_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $s_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $\dot{s}_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $s_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $\dot{s}_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- En généralisant $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,
 $s_1^{(m)}(t)$ et $s_2^{(n)}(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $s_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $\dot{s}_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- En généralisant $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,
 $s_1^{(m)}(t)$ et $s_2^{(n)}(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

- Soit un signal aléatoire $s(t)$ dérivable, alors

$$E[s(t)\dot{s}(t)] = 0.$$

Lemme

Soient deux signaux aléatoires $s_1(t)$ et $s_2(t)$ **dérivables** et **statistiquement indépendants** alors

- $\dot{s}_1(t)$ et $s_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $s_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- $\dot{s}_1(t)$ et $\dot{s}_2(t)$ sont statistiquement indépendants.
- En généralisant $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$,
 $s_1^{(m)}(t)$ et $s_2^{(n)}(t)$ sont statistiquement indépendants.

Lemme

- Soit un signal aléatoire $s(t)$ dérivable, alors

$$E[s(t)\dot{s}(t)] = 0.$$

- En généralisant, on a $\forall k, k' \in \mathbb{N}^*$, avec $k + k'$ impair,

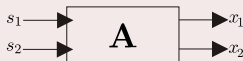
Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ **Séparation du mélange linéaire instantané**
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ Solver
- ➎ Séparation de mélange plat
- ➏ Conclusion et perspectives

Séparation du mélange linéaire instantané

Description

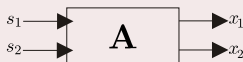
On considère le système suivant :
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$



Séparation du mélange linéaire instantané

Description

On considère le système suivant :
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

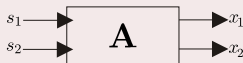


- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues supposées indépendantes.

Séparation du mélange linéaire instantané

Description

On considère le système suivant :
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

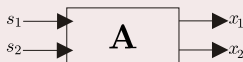


- **s** vecteur de sources inconnues supposées indépendantes.
- **A** matrice de mélange inconnu (invertible).

Séparation du mélange linéaire instantané

Description

On considère le système suivant :
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

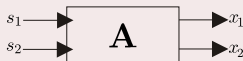


- **s** vecteur de sources inconnues supposées indépendantes.
- **A** matrice de mélange inconnu (invertible).
- **x** vecteur d'observations connues.

Séparation du mélange linéaire instantané

Description

On considère le système suivant :
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$



- **s** vecteur de sources inconnues supposées indépendantes.
- **A** matrice de mélange inconnu (invertible).
- **x** vecteur d'observations connues.

Problème

Estimer la matrice **B** telle que **y** = **Bx** soit un vecteur à composantes indépendantes.

Indéterminations : facteurs d'échelle et de permutation ¹

Le problème de séparation de sources ne peut être résolu qu'à :

- un facteur d'échelle près. Si $\mathbf{Bx}$ est à composantes indépendantes alors $\mathbf{DBx}$, avec $\mathbf{D}$ diagonale, est aussi à composantes indépendantes.
- une permutation près. Si $\mathbf{Bx}$ est à composantes indépendantes alors $\mathbf{PBx}$, avec $\mathbf{P}$ une matrice de permutation, est aussi à composantes indépendantes.

¹P. Comon, *Independent component Analysis, a new concept ?*, Signal Processing, 1994.

Résolution

On a

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = E[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^T] \end{cases}$$

Or on sait que $\mathbf{y}$ est à composantes indépendantes

$$\begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = \mathbf{D} \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = \mathbf{D} \end{cases}$$

► Système d'équations

Résolution

On a

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = E[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^T] \end{cases}$$

Or on sait que $\mathbf{y}$ est à composantes indépendantes

$$\begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = \mathbf{Id} \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = \mathbf{D} \end{cases}$$

► Système d'équations

Résolution

On a

$$\begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = E[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^T] \end{cases}$$

Or on sait que $\mathbf{y}$ est à composantes indépendantes

$$\begin{cases} \mathbf{B}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T = \text{Id} \\ \mathbf{B}E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T = \mathbf{D} \end{cases}$$

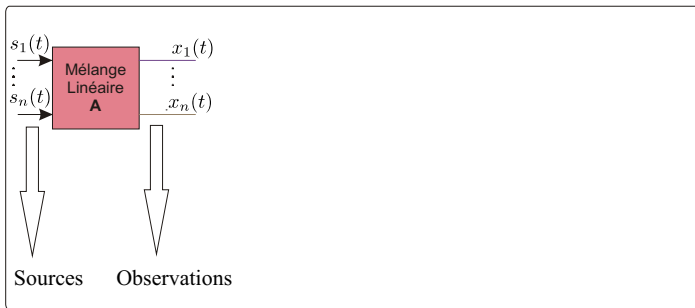
► Système d'équations

Solutions

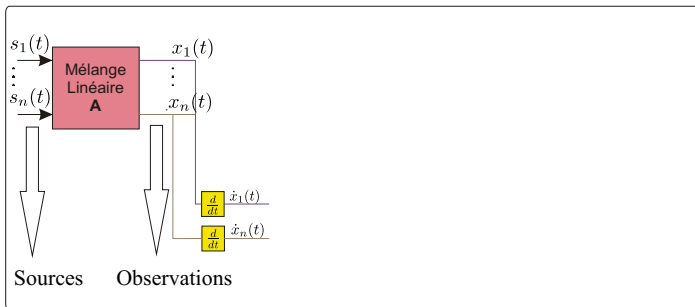
- Pour les cas deux sources, deux observations, il existe une solution analytique.

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T], E[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T])$$

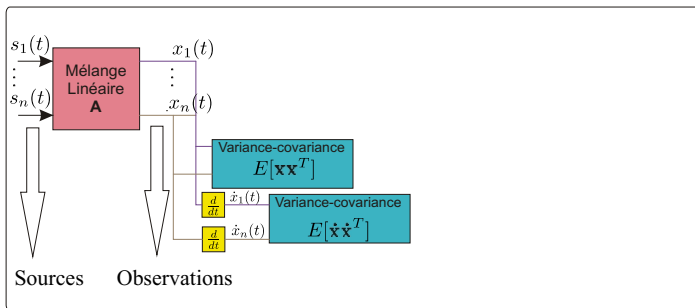
Vue d'ensemble



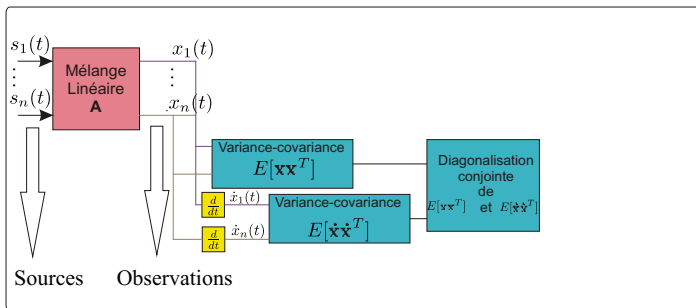
Vue d'ensemble



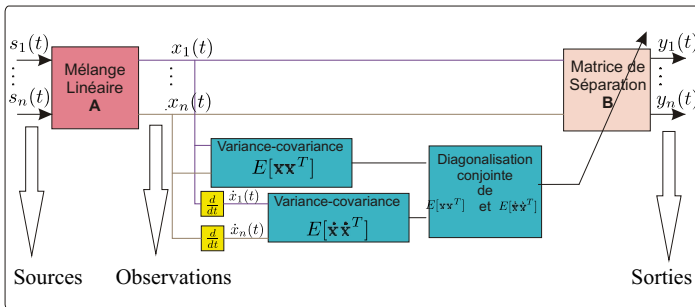
Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Vue d'ensemble



Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ **L'arithmétique des intervalles**
- ➍ Solver
- ➎ Séparation de mélange plat
- ➏ Conclusion et perspectives

Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$,

Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$,

Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$,

Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

Exemples

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$

Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$,

Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

Exemples

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$

Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$,

Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

Exemples

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$
- $[1; \infty] \notin \mathbb{IR}$

Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$.

- $[a] = [b]$, si $\underline{a} = \underline{b}$ et $\bar{a} = \bar{b}$.
- $[a] \subset [b]$, si $\underline{a} \geq \underline{b}$ et $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$.

- $[a] = [b]$, si $\underline{a} = \underline{b}$ et $\bar{a} = \bar{b}$.
- $[a] \subset [b]$, si $\underline{a} \geq \underline{b}$ et $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Définition

Si $\star \in \{+, -, \times, \div\}$ et $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$.

- $[a] = [b]$, si $\underline{a} = \underline{b}$ et $\bar{a} = \bar{b}$.
- $[a] \subset [b]$, si $\underline{a} \geq \underline{b}$ et $\bar{a} \leq \bar{b}$.

Définition

Si $\star \in \{+, -, \times, \div\}$ et $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [\underline{a} + \underline{b}; \bar{a} + \bar{b}] \\ [a] - [b] &= [\underline{a} - \bar{b}; \bar{a} - \underline{b}] \\ [a] \times [b] &= [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}; \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}] \end{aligned}$$

Propriétés de l'arithmétique des intervalles

En général,

$$[a] - [a] \neq [0; 0] \text{ et } [a] \div [a] \neq [1; 1]$$

Propriétés de l'arithmétique des intervalles

En général,

$$[a] - [a] \neq [0; 0] \text{ et } [a] \div [a] \neq [1; 1]$$

Exemples

- $[1; 2] - [1; 2] = [1; 2] + [-2; -1] = [-1; 1].$

Propriétés de l'arithmétique des intervalles

En général,

$$[a] - [a] \neq [0; 0] \text{ et } [a] \div [a] \neq [1; 1]$$

Exemples

- $[1; 2] - [1; 2] = [1; 2] + [-2; -1] = [-1; 1].$
- $[1; 2] \div [1; 2] = [\frac{1}{2}; 2].$

Calcul par intervalles

Définition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

Calcul par intervalles

Définition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

Exemples

❶ $[\exp]([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x})]$

Calcul par intervalles

Définition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

Exemples

$$\textcircled{1} [\exp]([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x})]$$

$$\textcircled{2} ([x])^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2; \bar{x}^2] & \text{si } \underline{x} \geq 0 \\ [0; \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] & \text{si } 0 \in [x] \\ [\bar{x}^2; \underline{x}^2] & \text{si } \bar{x} \leq 0 \end{cases}$$

Exemple

La fonction sinus

$$\begin{aligned}\sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x)\end{aligned}$$

$$[\sin] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$$

Exemple

La fonction sinus

$$\begin{aligned}\sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x)\end{aligned}$$

$$[\sin] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$$

La fonction sin étendue aux intervalles :

$$\begin{aligned}[\sin_1] : \mathbb{IR} &\rightarrow \mathbb{IR} \\ [x] &\mapsto [-1; 1]\end{aligned}$$

$[\sin_1]$ est une fonction d'inclusion pour sin.

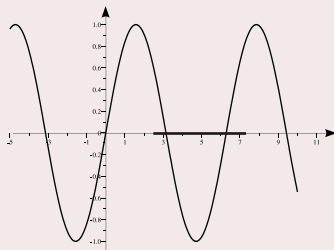


FIG.: $[\sin]([x])$

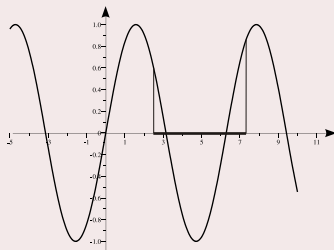


FIG.: $[sin]([x])$

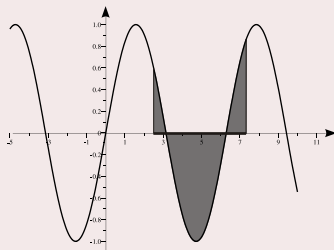


FIG.: $[sin]([x])$

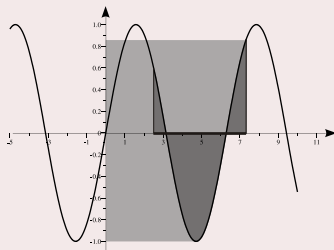


FIG.: $[sin]([x])$

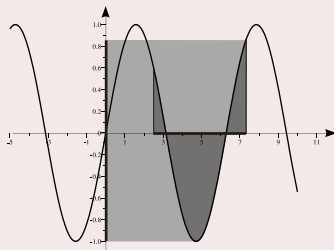


FIG.: $[sin]([x])$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1) \cos x$.
Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1) \cos x$.
Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit
$$\begin{cases} [f] : \mathbb{IR} & \rightarrow & \mathbb{IR} \\ [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{cases}$$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1) \cos x$.
Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\begin{cases} [f] : \mathbb{IR} & \rightarrow & \mathbb{IR} \\ [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{cases}$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) = (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{2}]^2 + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1) \cos x$.
Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit
$$\begin{cases} [f] : \mathbb{IR} & \rightarrow & \mathbb{IR} \\ [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{cases}$$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) = (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{2}]^2 + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{4}] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) \subset [0.65818; 1.4795]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

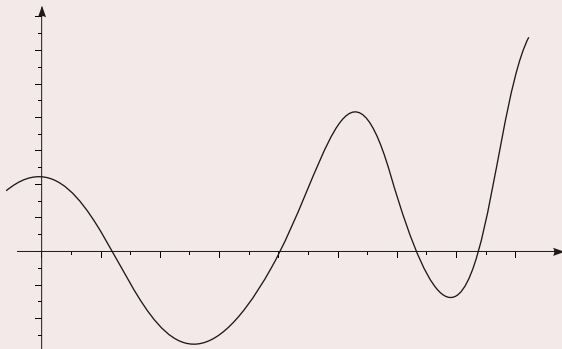
$$[f]([0; \frac{1}{2}]) \subset [0.65818; 1.4795]$$

Conclusion

$0 \notin [f]([0; \frac{1}{2}])$ or $\forall x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) \in [f]([0; \frac{1}{2}])$ donc $\mathbb{S} = \emptyset$

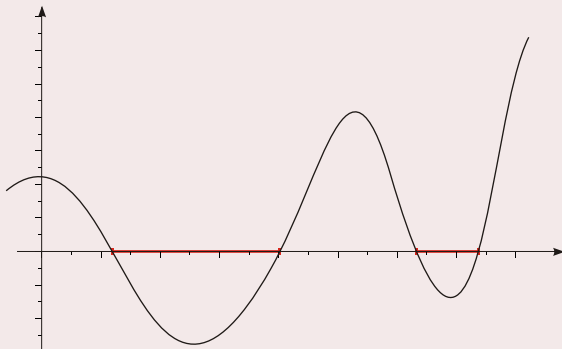
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



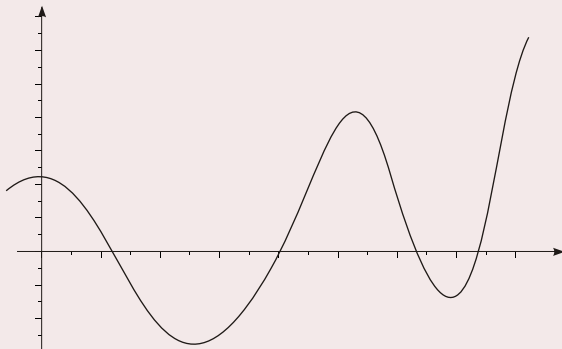
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



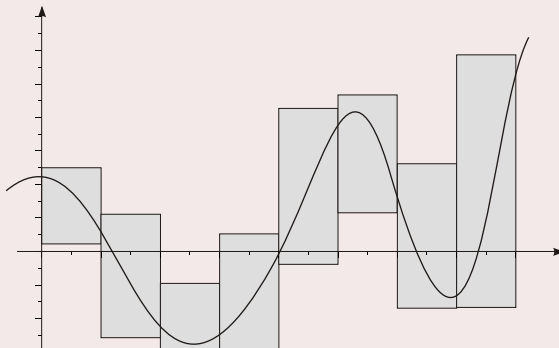
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



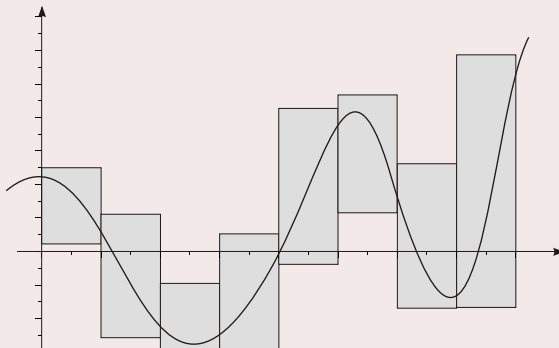
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



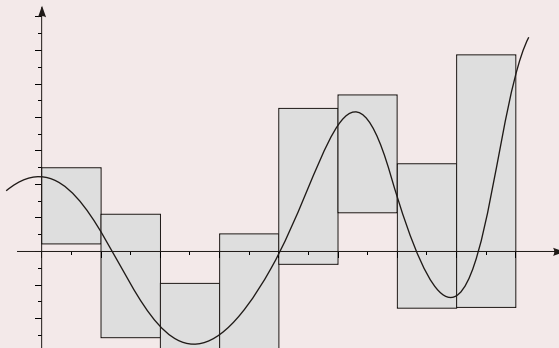
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



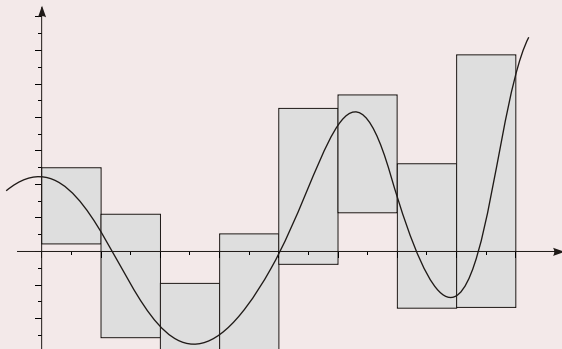
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



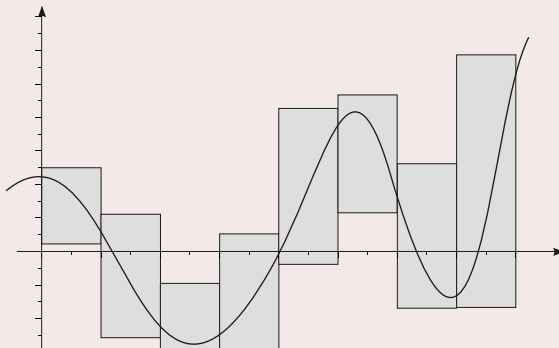
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



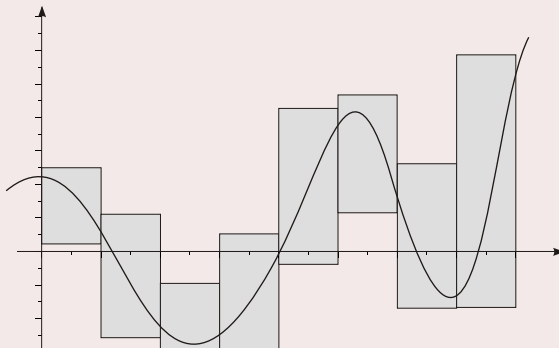
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



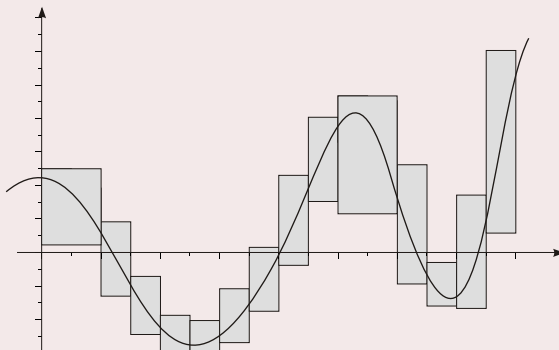
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



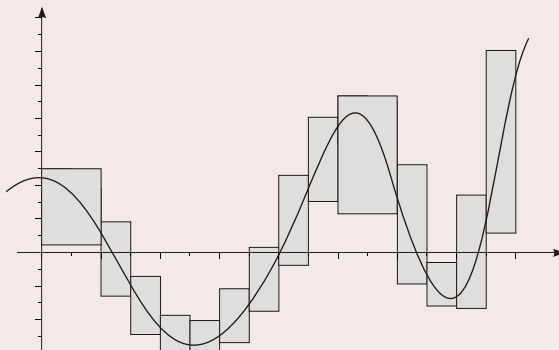
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



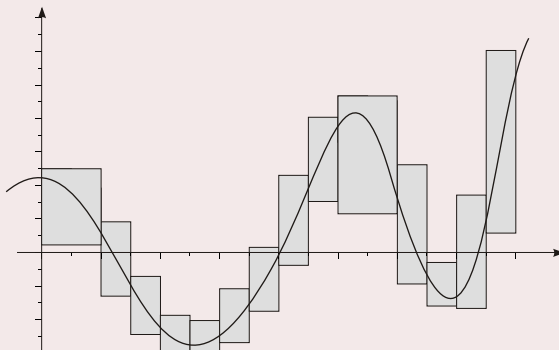
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



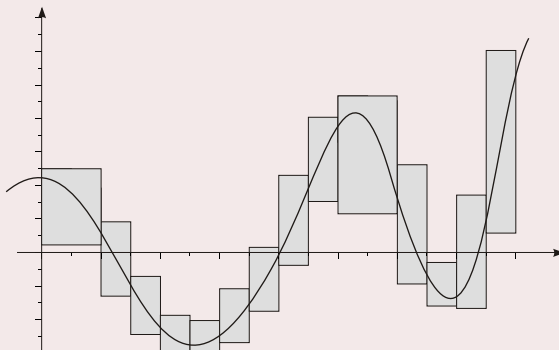
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



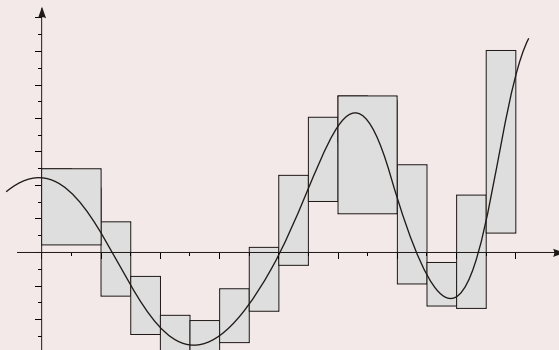
L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$



L'algorithme SIVIA 1D

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I, f(x) \leq 0\}$

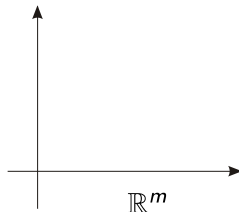
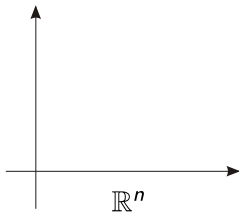


Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

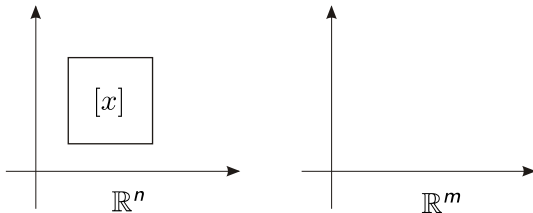


Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

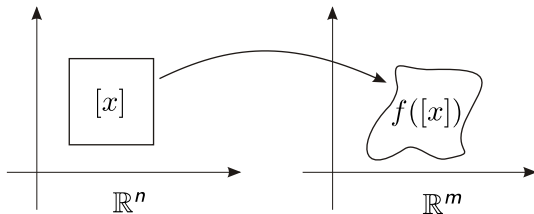


Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.

$[f] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{R}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

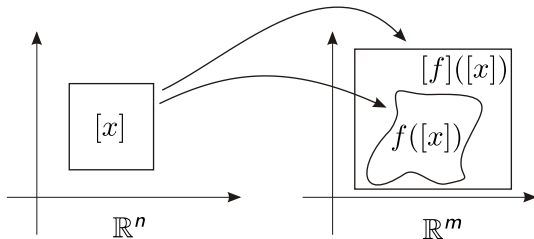


Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

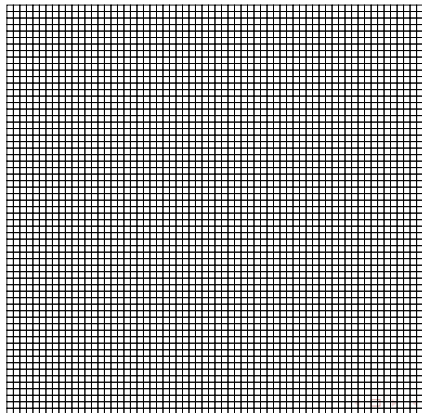
$[f] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une **fonction d'inclusion** pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{R}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



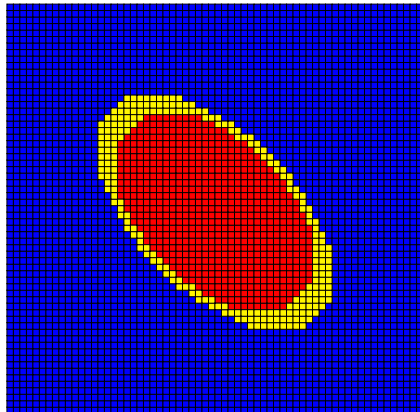
L'algorithme SIVIA 2D

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3] | f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



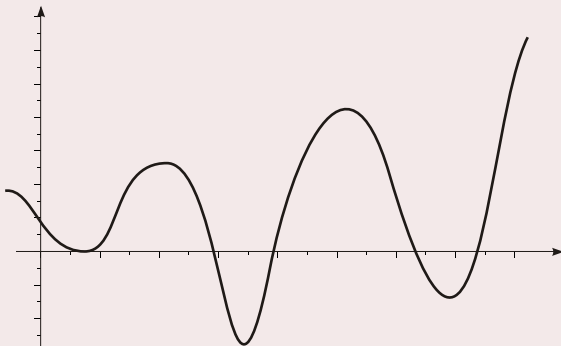
L'algorithme SIVIA 2D

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



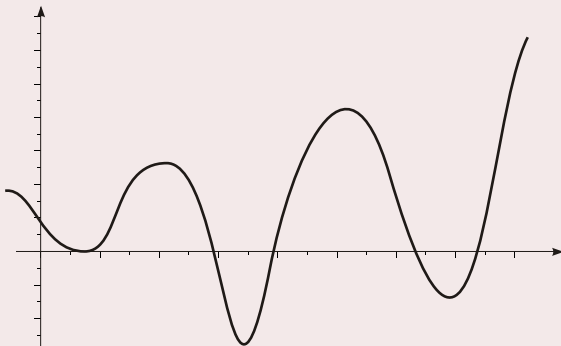
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



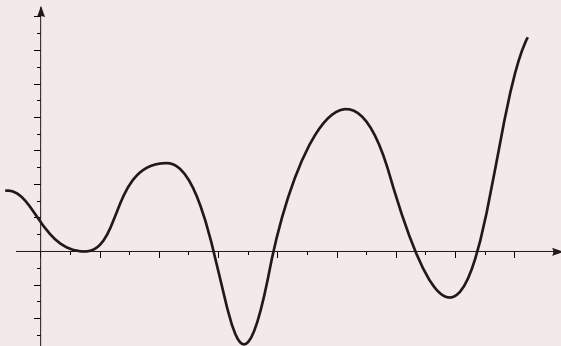
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



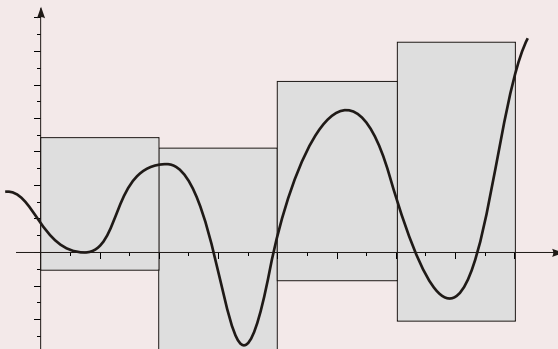
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



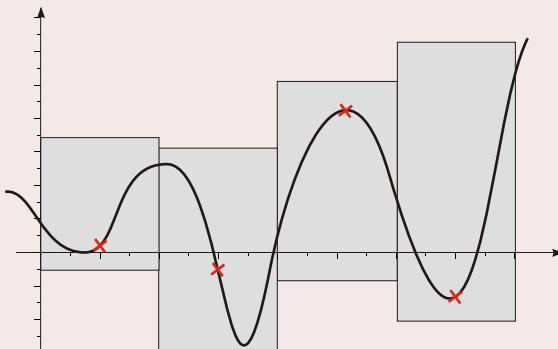
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



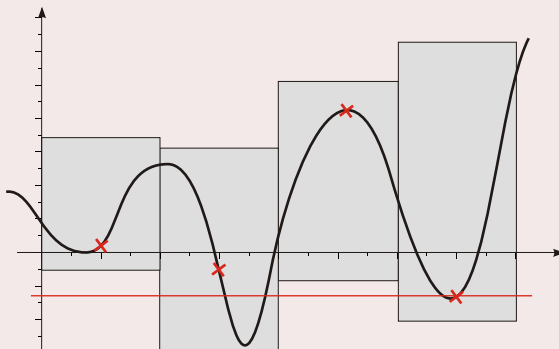
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



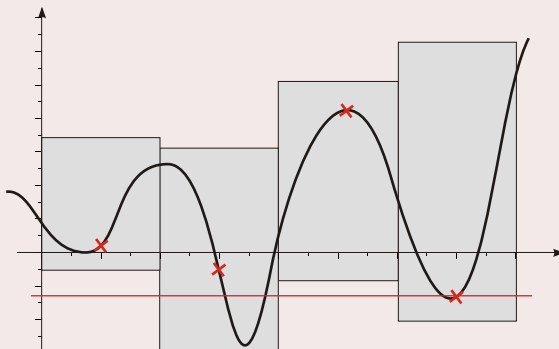
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



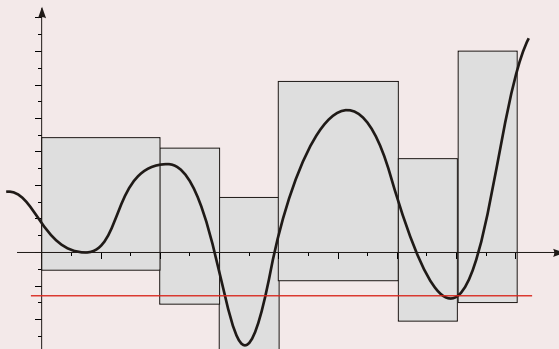
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



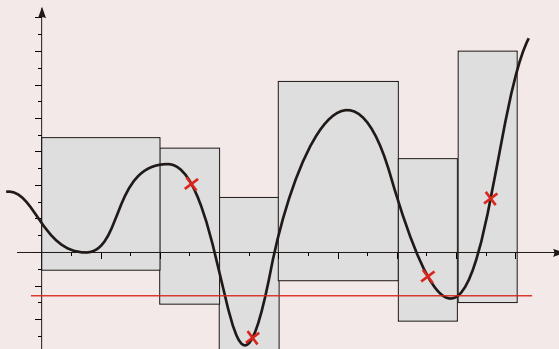
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



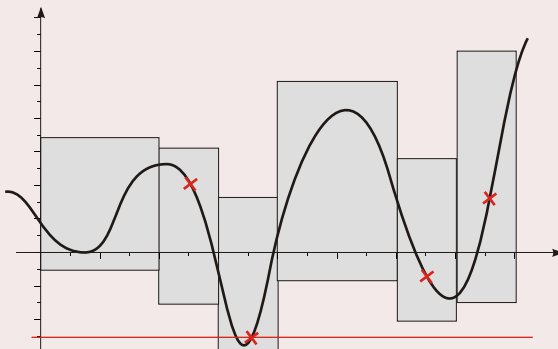
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



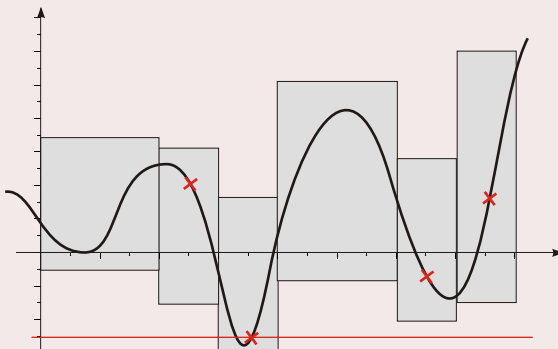
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



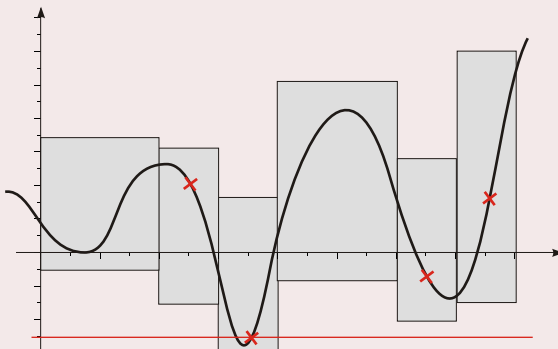
Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



Algorithme d'optimisation globale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f .
On cherche $x_{min} \in I$, tel que $\forall x \in I, f(x_{min}) \leq f(x)$.



Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ **Solver**
- ➎ Séparation de mélange plat
- ➏ Conclusion et perspectives

Application du calcul par intervalles pour la séparation de mélange linéaire statique

Problème linéaire statique

Trouver $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}$ telle que

$BE[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T$ et $BE[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T$ soient diagonales. [► Système d'équations](#)

$$\min_B (HorsDiag(BE[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T, BE[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T))$$

[► Détails](#)

Application du calcul par intervalles pour la séparation de mélange linéaire statique

Problème linéaire statique

Trouver $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}$ telle que
 $BE[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T$ et $BE[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T$ soient diagonales. ► Système d'équations

$$\min_B (HorsDiag(BE[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{B}^T, BE[\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}^T]\mathbf{B}^T))$$

► Détails

Exemple

Solver utilisant l'analyse par intervalles disponible sur
<http://www.istia.univ-angers.fr/~lagrange>

Plan de l'exposé

- ➊ Résultat sur l'indépendance statistique
- ➋ Séparation du mélange linéaire instantané
- ➌ L'arithmétique des intervalles
- ➍ Solver
- ➎ **Séparation de mélange plat**
- ➏ Conclusion et perspectives

Système plat

Définition d'un système plat ²

Considérons le système dynamique suivant

$$(1) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= g(\mathbf{x}(t)), \end{cases}$$

où

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état,
- $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée,
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de sortie.

²Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P., *Flatness and defect of non linear systems : introductory theory and examples.*, Int J. Control, 1995.

Definition d'un système plat ²

Le système (1) est **plat**, avec une sortie plate $\mathbf{y}$, si il existe $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m$, $\phi : (\mathbb{R}^m)^r \mapsto \mathbb{R}^n$ et $\psi : (\mathbb{R}^m)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m$ telles que

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{s}^{(r)}) \\ \mathbf{x} &= \phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}) \\ \mathbf{s} &= \psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)})\end{aligned}$$

Si le système (1) est linéaire, ψ est aussi linéaire, donc

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{A}_{r-1} \mathbf{y}^{(r-1)} + \mathbf{A}_r \mathbf{y}^{(r)}$$

exemple de système plat : La voiture

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos \delta \cos \theta \\ v \cos \theta \sin \theta \\ \frac{v \sin \delta}{L} \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.
- $\psi_{\mathbf{p}}$ fonction de mélange de forme connue.

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.
- $\psi_{\mathbf{p}}$ fonction de mélange de forme connue.
- $\mathbf{y}$ vecteur d'observations connues.

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.
 - $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.
 - $\psi_{\mathbf{p}}$ fonction de mélange de forme connue.
 - $\mathbf{y}$ vecteur d'observations connues.
- $\mathbf{y}$ connu $\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* \mathbf{y}^{(i)}$ connu.

Séparation de mélange plat

Description

On considère le système plat suivant

$$\mathbf{s}(t) = \psi_{\mathbf{p}} \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r-1)}, \mathbf{y}^{(r)} \right),$$

avec

- $\mathbf{s}$ vecteur de sources inconnues à composantes indépendantes.
 - $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.
 - $\psi_{\mathbf{p}}$ fonction de mélange de forme connue.
 - $\mathbf{y}$ vecteur d'observations connues.
- $\mathbf{y}$ connu $\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* \mathbf{y}^{(i)}$ connu.

Problème

Résolution

On sait que $\mathbf{s}$ est à composantes indépendantes donc

- $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = E[\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{p}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{p}}^T] = D,$

Résolution

On sait que $\mathbf{s}$ est à composantes indépendantes donc

- $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = E[\psi_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}^T] = \mathbf{D},$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,$
 $E[\mathbf{s}^{(m)}\mathbf{s}^{(n)T}] = E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}] = \mathbf{D},$

Résolution

On sait que $\mathbf{s}$ est à composantes indépendantes donc

- $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = E[\psi_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}^T] = \mathbf{D},$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,$
$$E[\mathbf{s}^{(m)}\mathbf{s}^{(n)T}] = E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}] = \mathbf{D},$$

Résolution

On sait que $\mathbf{s}$ est à composantes indépendantes donc

- $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = E[\psi_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}^T] = \mathbf{D},$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,$

$$E[\mathbf{s}^{(m)}\mathbf{s}^{(n)T}] = E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}] = \mathbf{D},$$

Solution

On cherche le vecteur p tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,$

$$\min_p (HorsDiag(E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}])).$$

Résolution

On sait que $\mathbf{s}$ est à composantes indépendantes donc

- $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = E[\psi_{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}^T] = \mathbf{D},$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,$
 $E[\mathbf{s}^{(m)}\mathbf{s}^{(n)T}] = E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}] = \mathbf{D},$

Solution

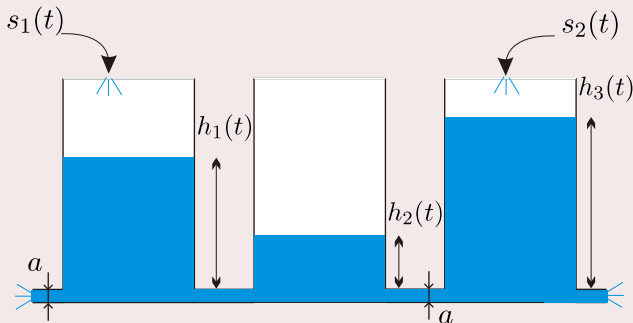
On cherche le vecteur p tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,$

$$\min_p (HorsDiag(E[\psi_{\mathbf{p}}^{(m)}\psi_{\mathbf{p}}^{(n)T}])).$$

Remarque

Les systèmes linéaires plats rentrent dans ce formalisme. [► Détails](#)

Exemple : Bacs d'eau



Système d'équations

Le système des bacs d'eau est régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(h_1, h_2, h_3) \\ f_2(h_1, h_2, h_3) \\ f_3(h_1, h_2, h_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$f_1(h_1, h_2, h_3) = -a\sqrt{2gh_1} - a \operatorname{sign}(h_1 - h_2)\sqrt{2g|h_1 - h_2|},$$

$$f_2(h_1, h_2, h_3) = a \operatorname{sign}(h_1 - h_2)\sqrt{2g|h_1 - h_2|} - a \operatorname{sign}(h_2 - h_3)\sqrt{2g|h_2 - h_3|},$$

$$f_3(h_1, h_2, h_3) = -a\sqrt{2gh_3} - a \operatorname{sign}(h_2 - h_3)\sqrt{2g|h_2 - h_3|}.$$

Description

Le système des bacs d'eau est un système plat non linéaire.

Supposons

- $\mathbf{s}$ inconnu et à composantes indépendantes,
- a, g , inconnus.

Description

Le système des bacs d'eau est un système plat non linéaire.
Supposons

- $\mathbf{s}$ inconnu et à composantes indépendantes,
- a, g , inconnus.

Fonction ψ

$$\text{on a } \psi_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 + \dot{y}_2 - f_2 - 2f_3 \\ \dot{y}_1 - \dot{y}_2 - f_2 - 2f_1 \end{pmatrix},$$

où $\mathbf{p} = (a, g)$

Conclusion et perspectives

Séparation de mélange instantané

- Statistique d'ordre 2 (Formalisme à temps continu).
- Solver par intervalles.
- Conditions sur les signaux pour que la diagonalisation conjointe de $E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$ et $E[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^T]$ soit possible.
- Étendre aux dérivées d'ordre supérieur afin d'obtenir des algorithmes robustes.

Conclusion et perspectives

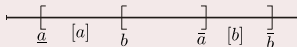
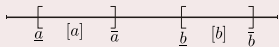
Séparation de mélange instantané

- Statistique d'ordre 2 (Formalisme à temps continu).
- Solver par intervalles.
- Conditions sur les signaux pour que la diagonalisation conjointe de $E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$ et $E[\dot{\mathbf{y}}\dot{\mathbf{y}}^T]$ soit possible.
- Étendre aux dérivées d'ordre supérieur afin d'obtenir des algorithmes robustes.

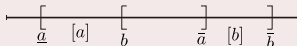
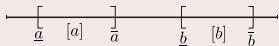
Extension à des mélanges de signaux plus complexe

- Techniques de séparation de sources pour l'estimation de paramètres en aveugle.

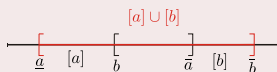
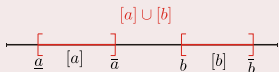
Exemple :



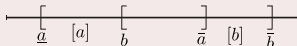
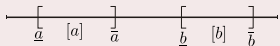
Exemple :



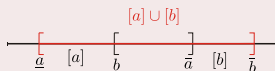
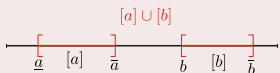
La réunion $\cup$



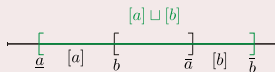
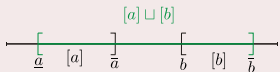
Exemple :



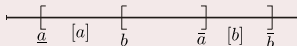
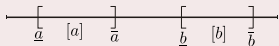
La réunion $\cup$



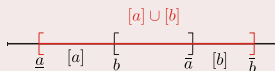
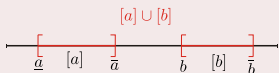
la réunion $\sqcup$



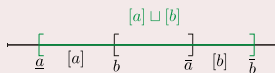
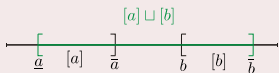
Exemple :



La réunion $\cup$



la réunion $\sqcup$



l'intersection $\cap$

Description

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{A}_{r-1} \mathbf{y}^{(r-1)} + \mathbf{A}_r \mathbf{y}^{(r)}$$

où les matrices $\mathbf{A}_i$ sont à estimer.

◀ Retour

Description

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \mathbf{y} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \dots + \mathbf{A}_{r-1} \mathbf{y}^{(r-1)} + \mathbf{A}_r \mathbf{y}^{(r)}$$

où les matrices $\mathbf{A}_i$ sont à estimer.

Résolution

- $\mathbf{A}_0 E(\mathbf{y} \mathbf{y}^T) \mathbf{A}_0^T + \mathbf{A}_0 E(\mathbf{y} \dot{\mathbf{y}}^T) \mathbf{A}_1^T + \dots + \mathbf{A}_r E(\mathbf{y}^{(r)} \mathbf{y}^{(r-1)T}) \mathbf{A}_{r-1}^T + \mathbf{A}_r E(\mathbf{y}^{(r)} \mathbf{y}^{(r)T}) \mathbf{A}_r^T = \mathbf{Id}_m$
- $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,$

$$\mathbf{A}_0 E(\mathbf{y}^{(m)} \mathbf{y}^{(n)T}) \mathbf{A}_0^T + \dots + \mathbf{A}_r E(\mathbf{y}^{(m+r)} \mathbf{y}^{(n+r)T}) \mathbf{A}_r^T = \mathbf{D}$$

◀ Retour

Système d'équations

$$\begin{cases} b_{11}^2 E(x_1^2) + 2b_{11}b_{12}E(x_1x_2) + b_{12}^2 E(x_2^2) & = 1 \\ b_{21}^2 E(x_1^2) + 2b_{21}b_{22}E(x_1x_2) + b_{22}^2 E(x_2^2) & = 1 \\ b_{11}b_{21}E(x_1^2) + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})E(x_1x_2) + b_{12}b_{22}E(x_2^2) & = 0 \\ b_{11}b_{21}E(\dot{x}_1^2) + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})E(\dot{x}_1\dot{x}_2) + b_{12}b_{22}E(\dot{x}_2^2) & = 0 \end{cases}$$

où $B = b_{ij}$.

◀ Retour

Système d'équations

$$\begin{cases} b_{21} E(x_1^2) + (1 + b_{12} b_{21}) E(x_1 x_2) + b_{12} E(x_2^2) = 0 \\ b_{21} E(\dot{x}_1^2) + (1 + b_{12} b_{21}) E(\dot{x}_1 \dot{x}_2) + b_{12} E(\dot{x}_2^2) = 0 \end{cases}$$

◀ Retour

Système d'équations

$$\begin{cases} f_1(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(x_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(x_1x_2) + b_{12}E(x_2^2) & (= 0) \\ f_2(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\dot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\dot{x}_1\dot{x}_2) + b_{12}E(\dot{x}_2^2) & (= 0) \end{cases}$$

◀ Retour

Système d'équations

$$\begin{cases} f_1(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(x_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(x_1x_2) + b_{12}E(x_2^2) & (= 0) \\ f_2(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\dot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\dot{x}_1\dot{x}_2) + b_{12}E(\dot{x}_2^2) & (= 0) \end{cases}$$

Fonction objectif

$$\min \max(f_1^2, f_2^2)$$

◀ Retour

Système d'équations

$$\begin{cases} f_1(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(x_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(x_1x_2) + b_{12}E(x_2^2) & (= 0) \\ f_2(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\dot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\dot{x}_1\dot{x}_2) + b_{12}E(\dot{x}_2^2) & (= 0) \\ f_3(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\ddot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\ddot{x}_1\ddot{x}_2) + b_{12}E(\ddot{x}_2^2) & (= 0) \\ \vdots \\ f_N(b_{12}, b_{21}) = \dots \end{cases}$$

◀ Retour

Système d'équations

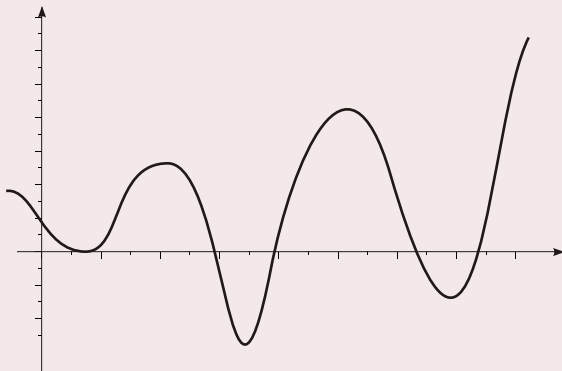
$$\begin{cases} f_1(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(x_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(x_1x_2) + b_{12}E(x_2^2) & (= 0) \\ f_2(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\dot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\dot{x}_1\dot{x}_2) + b_{12}E(\dot{x}_2^2) & (= 0) \\ f_3(b_{12}, b_{21}) = b_{21}E(\ddot{x}_1^2) + (1 + b_{12}b_{21})E(\ddot{x}_1\ddot{x}_2) + b_{12}E(\ddot{x}_2^2) & (= 0) \\ \vdots \\ f_N(b_{12}, b_{21}) = \dots \end{cases}$$

Fonction objectif

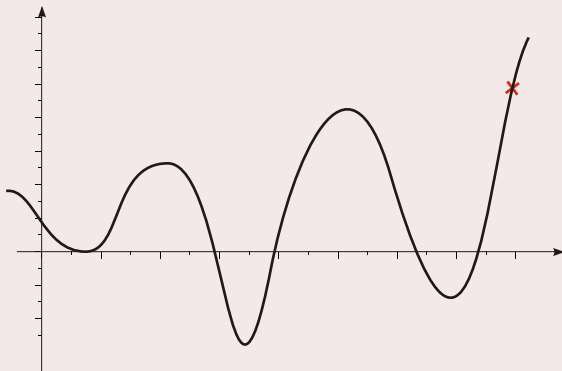
$$\text{Min Max } (f_1^2, f_2^2, f_3^2, \dots, f_N^2)$$

◀ Retour

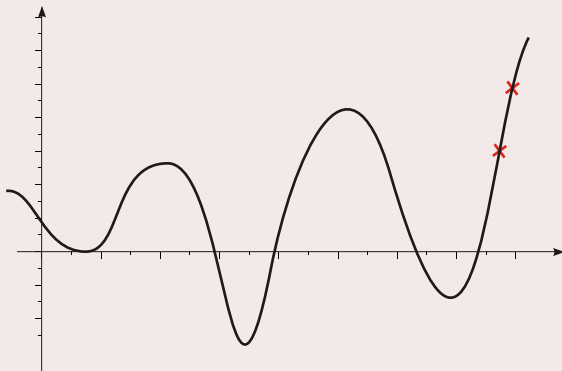
Algorithmes basés sur les méthodes de gradient



Algorithmes basés sur les méthodes de gradient



Algorithmes basés sur les méthodes de gradient



Algorithmes basés sur les méthodes de gradient

