Estimation de paramètres en aveugle pour des systèmes inversibles

S. Lagrange, V. Vigneron, C. Jutten, L. Jaulin

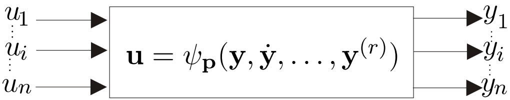
Groupe de Travail Ensembliste

26 mai 2005

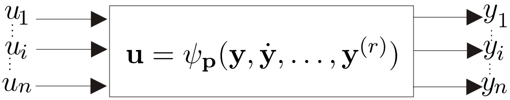
Vue d'ensemble

▸ Systèmes Inversibles

Vue d'ensemble

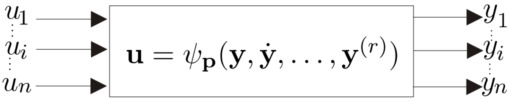


Vue d'ensemble



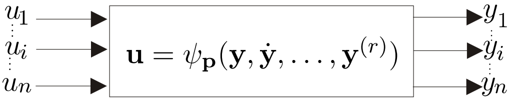
- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).

Vue d'ensemble



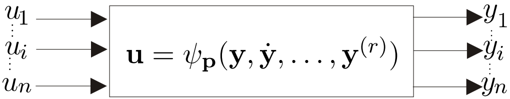
- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.

Vue d'ensemble



- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.
- $\mathbf{u}$ vecteur d'entrées inconnues.

Vue d'ensemble



- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.
- $\mathbf{u}$ vecteur d'entrées inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Vue d'ensemble

$$\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} \longrightarrow \boxed{\mathbf{u} = \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(r)})} \longrightarrow \begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{array}$$

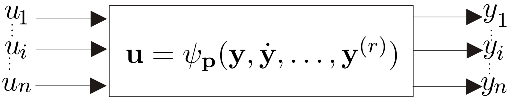
- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.
- $\mathbf{u}$ vecteur d'entrées inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Objectif

Estimation des paramètres **p** avec

- Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$.

Vue d'ensemble



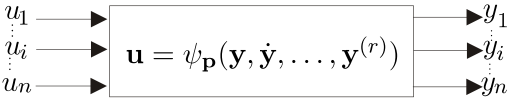
- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.
- $\mathbf{u}$ vecteur d'entrées inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Objectif

Estimation des paramètres $\mathbf{p}$ avec

- Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$.
- $\mathbf{u}$ stationnaire, ergodique et lisse.

Vue d'ensemble



- $\mathbf{y}$ vecteur de sorties connues ($\Rightarrow \mathbf{y}^{(i)}$ connues).
- $\psi_{\mathbf{p}}(.)$ de structure connue.
- $\mathbf{u}$ vecteur d'entrées inconnues.
- $\mathbf{p}$ vecteur de paramètres inconnus.

Objectif

Estimation des paramètres $\mathbf{p}$ avec

- Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$.
- $\mathbf{u}$ stationnaire, ergodique et lisse.

.

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
    - Indépendance

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
   - Indépendance
   - Gaussianité

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
   - Indépendance
   - Gaussianité
2. Fonction d'estimation

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
   - Indépendance
   - Gaussianité
2. Fonction d'estimation
3. Formalisme de l'estimation de paramètres en aveugle

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
   - Indépendance
   - Gaussianité
2. Fonction d'estimation
3. Formalisme de l'estimation de paramètres en aveugle
4. Exemples

Plan de l'exposé

1. Propriétés statistiques
   - Indépendance
   - Gaussianité
2. Fonction d'estimation
3. Formalisme de l'estimation de paramètres en aveugle
4. Exemples
5. Conclusion et perspectives

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Notation

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des signaux aléatoires stationnaires, ergodiques et lisses.

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Notation

- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des signaux aléatoires stationnaires, ergodiques et lisses.

Définition : Indépendance de signaux aléatoires

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.
Les signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants si $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, les variables aléatoires $f_1(u_1(.))$ et $f_2(u_2(.))$ sont indépendantes.

Illustration

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Groupe de transformation $\mathcal{T}_I$ préservant l'indépendance

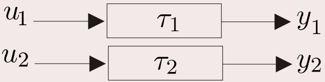
Si les signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants alors, pour tout système stationnaire τ_1, τ_2, les signaux aléatoires $\tau_1(u_1(.))$ et $\tau_2(u_2(.))$ sont indépendants.

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Groupe de transformation $\mathcal{T}_I$ préservant l'indépendance

Si les signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants alors, pour tout système stationnaire τ_1, τ_2, les signaux aléatoires $\tau_1(u_1(.))$ et $\tau_2(u_2(.))$ sont indépendants.

Illustration

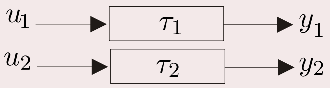


Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Groupe de transformation $\mathcal{T}_I$ préservant l'indépendance

Si les signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants alors, pour tout système stationnaire τ_1, τ_2, les signaux aléatoires $\tau_1(u_1(.))$ et $\tau_2(u_2(.))$ sont indépendants.

Illustration



Exemples

Si $u_1(.)$ et $u_2(.)$ sont indépendants, alors

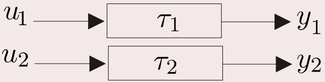
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u_1(.)$ et $\beta u_2(.)$ sont indépendants.

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Groupe de transformation $\mathcal{T}_I$ préservant l'indépendance

Si les signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants alors, pour tout système stationnaire τ_1, τ_2, les signaux aléatoires $\tau_1(u_1(.))$ et $\tau_2(u_2(.))$ sont indépendants.

Illustration



Exemples

Si $u_1(.)$ et $u_2(.)$ sont indépendants, alors

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u_1(.)$ et $\beta u_2(.)$ sont indépendants.

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Propriété 1

Soient deux signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ indépendants. On a, $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$u_1^{(k)}(.) \text{ et } u_2^{(l)}(.) \text{ sont indépendants.}$$

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Propriété 1

Soient deux signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ indépendants. On a, $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$u_1^{(k)}(.) \text{ et } u_2^{(l)}(.) \text{ sont indépendants.}$$

Propriété 2

Si $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants, alors

Signaux aléatoires statistiquement indépendants

Propriété 1

Soient deux signaux aléatoires $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ indépendants. On a, $\forall k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$u_1^{(k)}(.) \text{ et } u_2^{(l)}(.) \text{ sont indépendants.}$$

Propriété 2

Si $u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{S}$ sont indépendants, alors

$$E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) = 0$$

$$E(\dot{u}_1 u_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$E(u_1^{(k)} u_2^{(l)}) = 0, \ \forall k, l \in \mathbb{N}^*.$$

Signaux aléatoires gaussiens

Définition : Signal aléatoire gaussien

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.
Le signal aléatoire $u(.) \in \mathcal{S}$ est gaussien si $\forall f \in \mathcal{L}$, la variable aléatoire $f(u(.))$ est gaussienne.

Signaux aléatoires gaussiens

Définition : Signal aléatoire gaussien

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$.
Le signal aléatoire $u(.) \in \mathcal{S}$ est gaussien si $\forall f \in \mathcal{L}$, la variable aléatoire $f(u(.))$ est gaussienne.

Illustration

Soit $u(.)$ un signal aléatoire gaussien et $f(u(.)) = u(20) + \dot{u}(10)$ une fonction de $\mathcal{L}$.
Quelle est la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = f(u(.))$?

Résultat

Groupe de transformation $\mathcal{T}_G$ préservant la gaussianité

Si le signal aléatoire $u(.) \in \mathcal{S}$ est gaussien alors, pour tout système linéaire stationnaire τ, le signal aléatoire $\tau(u(.))$ est gaussien.

Groupe de transformation $\mathcal{T}_G$ préservant la gaussianité

Si le signal aléatoire $u(.) \in \mathcal{S}$ est gaussien alors, pour tout système linéaire stationnaire τ, le signal aléatoire $\tau(u(.))$ est gaussien.

Exemples

Si $u(.)$ est gaussien, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u(.)$ est gaussien.

Signaux aléatoires gaussiens

Propriété 1

Si $u(.) \in \mathcal{S}$ est un signal aléatoire gaussien, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$u^{(k)}(.) \text{ est gaussien.}$$

Signaux aléatoires gaussiens

Propriété 1

Si $u(.) \in \mathcal{S}$ est un signal aléatoire gaussien, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$u^{(k)}(.) \text{ est gaussien}.$$

Propriété 2

Soit $u(.) \in \mathcal{S}$ un signal aléatoire gaussien. On a, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$E\left([u - E(u)]^4\right) - 3E\left([u - E(u)]^2\right)^2 = 0,$$

$$E\left(\dot{u}^4\right) - 3E\left(\dot{u}^2\right)^2 = 0,$$

$$\vdots$$

$$E\left(u^{(k)^4}\right) - 3E\left(u^{(k)^2}\right)^2 = 0.$$

Fonction d'estimation

Notation

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des moments d'un vecteur de signaux aléatoires.

Exemples

Fonction d'estimation

Notation

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des moments d'un vecteur de signaux aléatoires.

Exemples

Définition : L'algèbre des moments $\mathcal{A}$

On définit l'algèbre des moments, noté $\mathcal{A}$, telle que :

- $\mu \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mu \in \mathcal{A}$,
- $\mu_1 \in \mathcal{A}, \mu_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu_1 + \mu_2 \in \mathcal{A} \\ \mu_1.\mu_2 \in \mathcal{A} \end{array} \right.$.

Exemples

Fonction d'estimation

Définition : Fonction d'estimation

Soit q un entier non nul.

Une fonction $\mathbf{h}$: $\begin{array}{c} \mathcal{S}^m \longrightarrow \mathcal{A}^q \\ \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{u}) \end{array}$ est une fonction d'estimation.

Fonction d'estimation

Définition : Fonction d'estimation

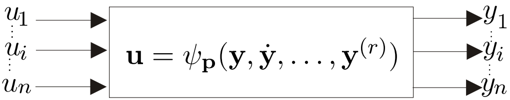
Soit q un entier non nul.

Une fonction $\mathbf{h}$: $\begin{array}{c} \mathcal{S}^m \longrightarrow \mathcal{A}^q \\ \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{h}(\mathbf{u}) \end{array}$ est une fonction d'estimation.

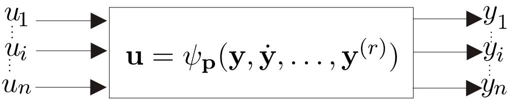
Exemple de fonction d'estimation

$$\mathbf{h} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}^2 \\ u & \longrightarrow & \left(\begin{array}{c} E(u^4) - 3\left(E(u^2)\right)^2 \\ E(\dot{u}^4) - 3\left(E(\dot{u}^2)\right)^2 \end{array} \right) \end{array}$$

Estimation de paramètres en aveugle



Estimation de paramètres en aveugle

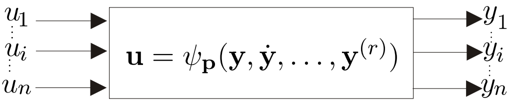


avec

$\mathbf{u} \in \mathcal{S}^n$ et $\mathbf{p}$ inconnus.

$\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Estimation de paramètres en aveugle



avec

$\mathbf{u} \in \mathcal{S}^n$ et $\mathbf{p}$ inconnus.

$\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Hypothèses

Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{h}$ une fonction d'estimation

Estimation de paramètres en aveugle

$u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n \rightarrow$ $\boxed{\mathbf{u} = \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(r)})}$ $\rightarrow y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n$

avec

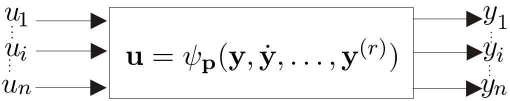
$\mathbf{u} \in \mathcal{S}^n$ et $\mathbf{p}$ inconnus.

$\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Hypothèses

Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{h}$ une fonction d'estimation

Estimation de paramètres en aveugle



avec

$\mathbf{u} \in \mathcal{S}^n$ et $\mathbf{p}$ inconnus.

$\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Hypothèses

Hypothèses statistiques sur les entrées $\mathbf{u}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{h}$ une fonction d'estimation

Formalisme pour l'estimation de paramètres en aveugle

Soit un système paramétré $\mathbf{u} = \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(r)})$ et une fonction d'estimation $\mathbf{h}$, déterminer l'ensemble

$$\mathbb{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{h}(\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(r)})) = \mathbf{0}\}.$$

Exemple 1

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) - y_1(t) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_1^2 p_2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

Exemple 1

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) - y_1(t) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_1^2 p_2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Exemple 1

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) - y_1(t) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_1^2 p_2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour l'indépendance

Exemple 1

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) - y_1(t) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_1^2 p_2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour l'indépendance

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) \\ E(\dot{u}_1 u_2) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) - y_1(t) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_1^2 p_2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour l'indépendance

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) \\ E(\dot{u}_1 u_2) \end{pmatrix}.$$

u_1 et u_2 sont statistiquement indépendants $\Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Exemple 1

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

Exemple 1

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{cl} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cl} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{cc} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1 \dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\dot{y}_1 s_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2 \dot{y}_2} + p_1 p_2 \overline{c_2 s_1} - \overline{y_1 \dot{y}_2} & \\ -p_2^2 \overline{y_1 \sin y_1} - (\frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2} - \overline{y_1})(\overline{\dot{y}_2} + p_1^2 p_2 \overline{\sin y_1}) & = 0 \\ \frac{1}{p_1}\overline{\ddot{y}_1 \dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\ddot{y}_1 \dot{y}_1 c_1} - \frac{p_1}{p_2}\overline{\dot{y}_2 s_2 \dot{y}_2} - p_1 p_2 \overline{\dot{y}_2 s_2 s_1} - \overline{\dot{y}_1 \dot{y}_2} - p_2^2 \overline{\dot{y}_1 s_1} & = 0 \end{array} \right.$$

avec $c_i = \cos y_i$ et $s_i = \sin y_i$.

Exemple 1

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{\begin{array}{cl} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cl} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{cl} \begin{array}{c} \frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1\dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\dot{y}_1 s_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2\dot{y}_2} + p_1 p_2 \overline{c_2 s_1} - \overline{y_1\dot{y}_2} \\ -p_2^2\overline{y_1 \sin y_1} - (\frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2} - \overline{y_1})(\overline{\dot{y}_2} + p_1^2 p_2 \overline{\sin y_1}) \end{array} & = 0 \\ \frac{1}{p_1}\overline{\ddot{y}_1\dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\ddot{y}_1\dot{y}_1 c_1} - \frac{p_1}{p_2}\overline{\dot{y}_2 s_2 \dot{y}_2} - p_1 p_2 \overline{\dot{y}_2 s_2 s_1} - \overline{\dot{y}_1\dot{y}_2} - p_2^2\overline{\dot{y}_1 s_1} & = 0 \end{array}\right.$$

avec $c_i = \cos y_i$ et $s_i = \sin y_i$.

SIVIA

Exemple 1 bis

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1 = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1 \\ u_2 = & \dot{y}_2 + p_1^2 p_2 \sin(y_1) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et u_1 supposée gaussienne,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Exemple 1 bis

On considère le système inversible suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1 = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1 \\ u_2 = & \dot{y}_2 + p_1^2 p_2 \sin(y_1) \end{array} \right.$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et u_1 supposée gaussienne,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour la gaussianité

Exemple 1 bis

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1 = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1 \\ u_2 = & \dot{y}_2 + p_1^2 p_2 \sin(y_1) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et u_1 supposée gaussienne,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour la gaussianité

Soit $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1^4) - 3\left(E(u_1^2)\right)^2) \\ E(\dot{u}_1{}^4) - 3\left(E(\dot{u}_1{}^2)\right)^2) \end{pmatrix}.$

Exemple 1 bis

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1 = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1 \\ u_2 = & \dot{y}_2 + p_1^2 p_2 \sin(y_1) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et u_1 supposée gaussienne,
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu,
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour la gaussianité

Soit $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1^4) - 3\left(E(u_1^2)\right)^2) \\ E(\dot{u}_1{}^4) - 3\left(E(\dot{u}_1{}^2)\right)^2) \end{pmatrix}$.

u_1 gaussien $\Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Exemple 1 bis

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{r} E(u_1^4) - 3\left(E(u_1^2)\right)^2\right) = 0 \\ E(\dot{u_1}^4) - 3\left(E(\dot{u_1}^2)\right)^2\right) = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 1 bis

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{r} E(u_1^4) - 3\left(E(u_1^2)\right)^2\big) = 0 \\ E(\dot{u_1}^4) - 3\left(E(\dot{u_1}^2)\right)^2\big) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \overline{(u_1 - \overline{u_1})^4} - 3\overline{(u_1 - \overline{u_1})^2}^2 = 0 \\ \overline{\dot{u}_1^4} - 3\overline{\dot{u}_1^2}^2 = 0 \end{array} \right.$$

avec $u_1 = \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1$

et $\dot{u}_1 = \frac{1}{p_1}\ddot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\dot{y}_2 \sin(y_2) - \dot{y}_1$

Exemple 1 bis

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{r} E(u_1^4) - 3\left(E(u_1^2)\right)^2 = 0 \\ E(\dot{u_1}^4) - 3\left(E(\dot{u_1}^2)\right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

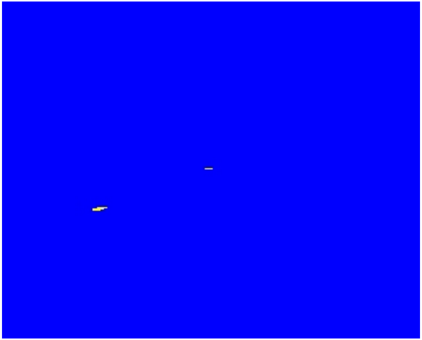
$$\left\{ \begin{array}{r} \overline{(u_1 - \overline{u_1})^4} - 3\overline{(u_1 - \overline{u_1})^2}^2 = 0 \\ \overline{\dot{u}_1^4} - 3\overline{\dot{u}_1^2}^2 = 0 \end{array} \right.$$

avec $u_1 = \frac{1}{p_1}\dot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2) - y_1$

et $\dot{u}_1 = \frac{1}{p_1}\ddot{y}_1 + \frac{p_1}{p_2}\dot{y}_2 \sin(y_2) - \dot{y}_1$

SIVIA

Exemple 1 bis



Exemple 2 : Système non linéaire non identifiable en aveugle

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_2^2\sin(y_1(t)) \end{cases}$$

Exemple 2 : Système non linéaire non identifiable en aveugle

On considère le système inversible suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_2^2 \sin(y_1(t)) \end{array} \right.$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant.
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu.
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Exemple 2 : Système non linéaire non identifiable en aveugle

On considère le système inversible suivant :

$$\begin{cases} u_1(t) = & \frac{1}{p_1}\dot{y}_1(t) + \frac{p_1}{p_2}\cos(y_2(t)) \\ u_2(t) = & \dot{y}_2(t) + p_2^2 \sin(y_1(t)) \end{cases}$$

avec

- $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$ inconnu et supposé indépendant.
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ inconnu.
- $\mathbf{y}^{(i)}, \forall i \in \mathbb{N}$ connus.

Fonction d'estimation pour l'indépendance

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) \\ E(\dot{u}_1 u_2) \end{pmatrix}$$

Exemple 2

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

Exemple 2

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 2

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1\dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\dot{y}_1 s_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2\dot{y}_2} + p_1 p_2\overline{c_2 s_1} & \\ \quad -(\frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2})(\overline{\dot{y}_2} + p_1^2 p_2\overline{\sin y_1}) & = 0 \\ \frac{1}{p_1}\overline{\ddot{y}_1\dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\ddot{y}_1\dot{y}_1 c_1} - \frac{p_1}{p_2}\overline{\dot{y}_2 s_2\dot{y}_2} - p_1 p_2\overline{\dot{y}_2 s_2 s_1} & = 0 \end{cases}$$

avec $c_i = \cos y_i$ et $s_i = \sin y_i$.

Exemple 2

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

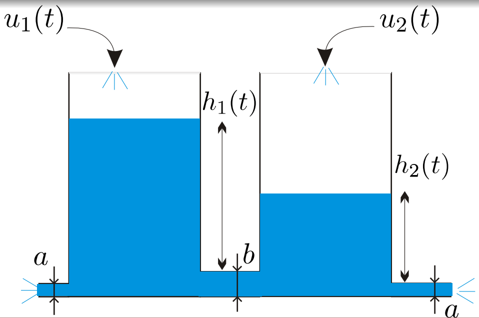
$$\begin{cases} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1 \dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\dot{y}_1 s_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2 \dot{y}_2} + p_1 p_2 \overline{c_2 s_1} \\ \quad -(\frac{1}{p_1}\overline{\dot{y}_1} + \frac{p_1}{p_2}\overline{c_2})(\overline{\dot{y}_2} + p_1^2 p_2 \overline{\sin y_1}) & = 0 \\ \frac{1}{p_1}\overline{\ddot{y}_1 \dot{y}_2} + \frac{p_2^2}{p_1}\overline{\ddot{y}_1 \dot{y}_1 c_1} - \frac{p_1}{p_2}\overline{\dot{y}_2 s_2 \dot{y}_2} - p_1 p_2 \overline{\dot{y}_2 s_2 s_1} & = 0 \end{cases}$$

avec $c_i = \cos y_i$ et $s_i = \sin y_i$.

SIVIA

Exemple : Bacs d'eau



Système d'équations

Le système des bacs d'eau est régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sqrt{2gh_1} - b\ sign(h_1 - h_2)\sqrt{2g\,|h_1 - h_2|} \\ -a\sqrt{2gh_2} - b\ sign(h_1 - h_2)\sqrt{2g\,|h_2 - h_1|} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Bacs d'eau

Expression de la fonction ψ

Le système des bacs d'eau est un système inversible non linéaire.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 + a\sqrt{2gy_1} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_1 - y_2|} \\ \dot{y}_2 + a\sqrt{2gy_2} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_2 - y_1|} \end{pmatrix}$$

- L'entrée $\mathbf{u}$ est inconnue et à composantes indépendantes,
- les sections a, b sont inconnues.

Exemple : Bacs d'eau

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

Exemple : Bacs d'eau

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{cases}$$

Exemple : Bacs d'eau

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{cases}$$

avec $u_1 = \dot{y}_1 + a\sqrt{2gy_1} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_1 - y_2|}$,
$u_2 = \dot{y}_2 + a\sqrt{2gy_2} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_2 - y_1|}$.

Exemple : Bacs d'eau

Caractérisation de $\mathbb{P} = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 | \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$

$$\begin{cases} E(u_1 u_2) - E(u_1)E(u_2) & = 0 \\ E(\dot{u}_1 u_2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1}\ \overline{u_2} & = 0 \\ \overline{\dot{u}_1 u_2} & = 0 \end{cases}$$

avec $u_1 = \dot{y}_1 + a\sqrt{2gy_1} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_1 - y_2|}$,
$u_2 = \dot{y}_2 + a\sqrt{2gy_2} + b\ sign(y_1 - y_2)\sqrt{2g\,|y_2 - y_1|}$.

SIVIA

Conclusion et Perspectives

Conclusion et Perspectives

- Ajout de dérivées améliore la robustesse.

Conclusion et Perspectives

- Ajout de dérivées améliore la robustesse.
- Conditions "d'identifiabilité en aveugle" des paramètres.

Conclusion et Perspectives

- Ajout de dérivées améliore la robustesse.
- Conditions "d'identifiabilité en aveugle" des paramètres.
- Idées d'autres exemples ?

Définition : Système inversible

Un système inversible de degré relatif r s'écrit

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ldots, \mathbf{y}^{(r)}(t))$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^m$ est la dérivée i-ième de $\mathbf{y}(t)$ et ψ est une fonction analytique de $(\mathbb{R}^m)^{r+1}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Retour

Définition : Système inversible

Un système inversible de degré relatif r s'écrit

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ldots, \mathbf{y}^{(r)}(t))$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^m$ est la dérivée i-ième de $\mathbf{y}(t)$ et ψ est une fonction analytique de $(\mathbb{R}^m)^{r+1}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exemples de Systèmes Inversibles

Retour

Définition : Système inversible

Un système inversible de degré relatif r s'écrit

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ldots, \mathbf{y}^{(r)}(t))$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^m$ est la dérivée i-ième de $\mathbf{y}(t)$ et ψ est une fonction analytique de $(\mathbb{R}^m)^{r+1}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exemples de Systèmes Inversibles

- Tous les systèmes plats sont des systèmes inversibles.

Retour

Définition : Système inversible

Un système inversible de degré relatif r s'écrit

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \ldots, \mathbf{y}^{(r)}(t))$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^m$ est la dérivée i-ième de $\mathbf{y}(t)$ et ψ est une fonction analytique de $(\mathbb{R}^m)^{r+1}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exemples de Systèmes Inversibles

- Tous les systèmes plats sont des systèmes inversibles.
- Voiture, bateau, grue, PVTOL, ...

Retour

Exemples

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$

- $E(u_1 u_2) \in \mathcal{M}$,
- $E(\dot{u}_1^3 \ddot{u}_2) \in \mathcal{M}$,
- $E(u_1 u_2)^2 \notin \mathcal{M}$.

Retour

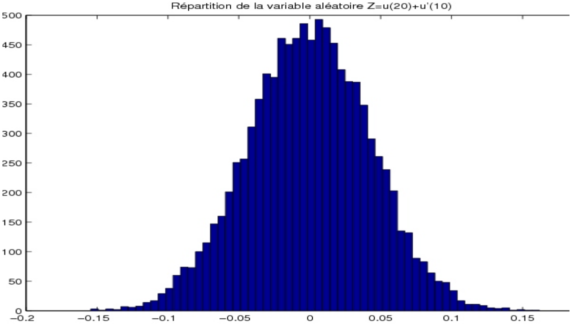
Exemples

Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^2$

- $E(u_1 u_2)^2 \in \mathcal{A}$,
- $E(\dot{u}_1^4) - 3(E(\dot{u}_1^2))^2 \in \mathcal{A}$.

Retour

Résultat



Retour

Illustration

Soient $u_1(.)$ et $u_2(.)$ deux signaux aléatoires indépendants.
Soient $f_1(u_1(.)) = \sin(u_1(20)^2) + \dot{u}_1(10)$ et
$f_2(u_2(.)) = 2u_2(15) + \cos(\dot{u}_2(40))$ deux fonctions de $\mathcal{F}$.
Les variables aléatoires $Z1 = f_1(u_1(.))$ et $Z2 = f_2(u_2(.))$ sont-elles indépendantes ?

Illustration

Retour