L'analyse par intervalles pour tester l'injectivité de fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

S. Lagrange   N. Delanoue   L. Jaulin

Laboratoire Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA)

Groupe de Travail - Méthodes Ensemblistes

18 mai 2006

Vue d'ensemble

Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

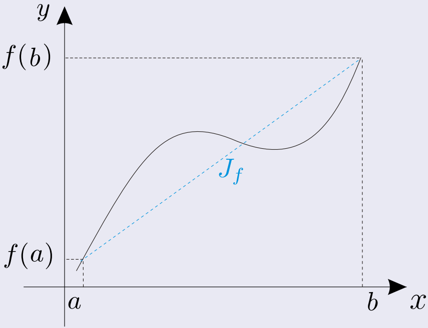
Vue d'ensemble

Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

Exemple



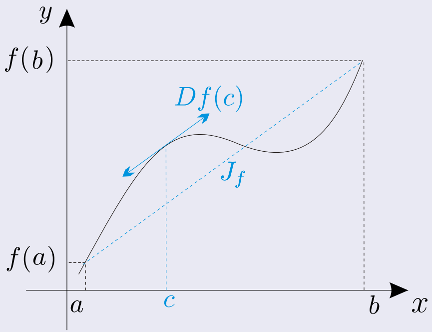
Vue d'ensemble

Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

Exemple



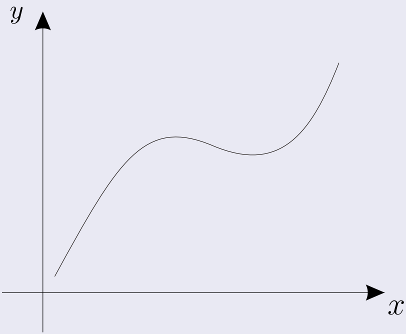
Vue d'ensemble

Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

Exemple

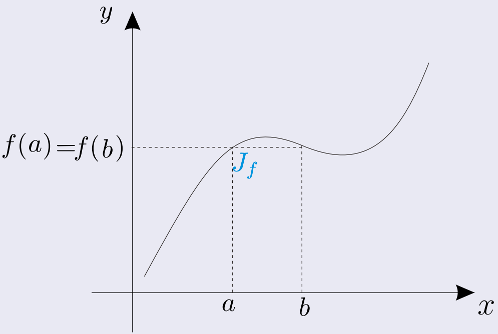


Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

Exemple



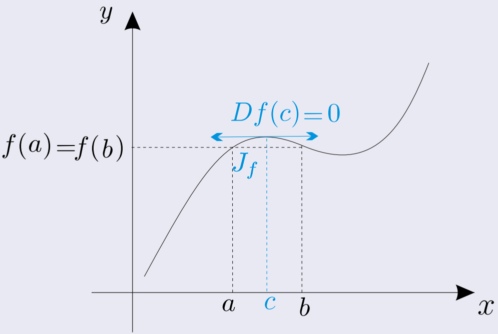
Vue d'ensemble

Théoreme des accroissements finis

Soit une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in Df([x]), f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a).$$

Exemple



Contre-Exemple

La fonction cercle

Considérons la fonction cercle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Plan de l'exposé

1. Injectivité partielle
   - Définition - Propriété
   - Condition d'injectivité partielle

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

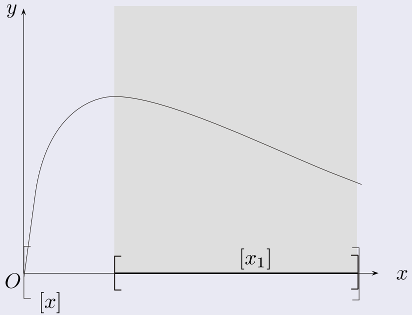
Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

1. Injectivité partielle
   - Définition - Propriété
   - Condition d'injectivité partielle
2. Algorithme
3. Exemples
4. Application
5. Conclusion

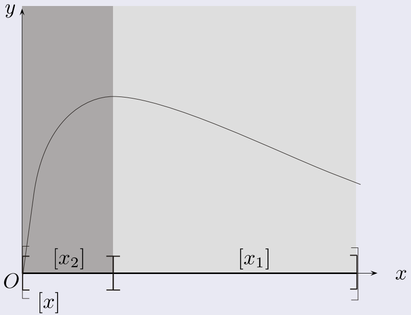
Motivation

Motivation



Injectivité partielle

Motivation



Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

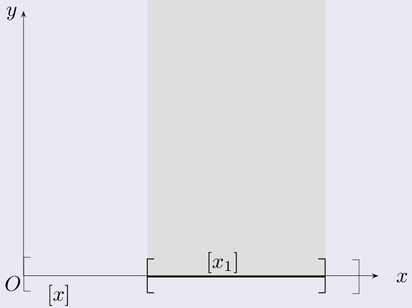
Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

Exemples



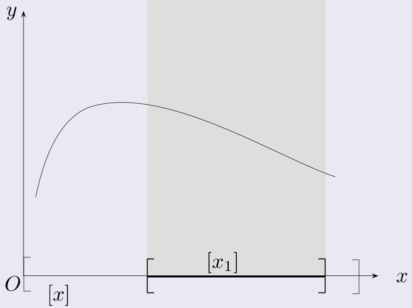
Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

Exemples



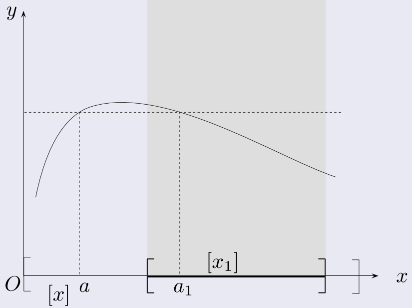
Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

Exemples



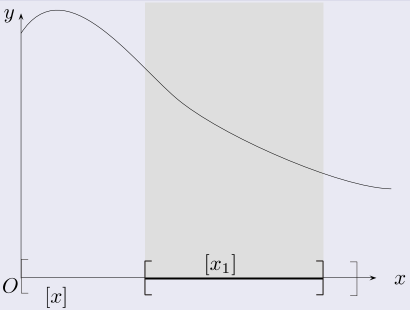
Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

Exemples



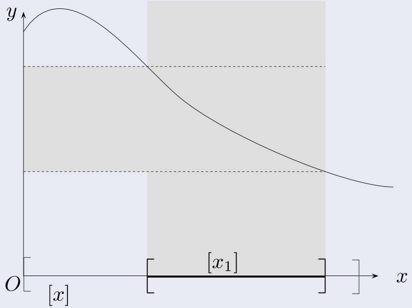
Injectivité partielle

Définition : Injection partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
f est une injection partielle sur $\mathcal{A}_1$ relativement à $\mathcal{A}$, notée $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A})$-injective, si $\forall a_1 \in \mathcal{A}_1, \forall a \in \mathcal{A}$,

$$f(a_1) = f(a) \Rightarrow a_1 = a.$$

Exemples



Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective } \Rightarrow f \text{ est } (\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective.}$$

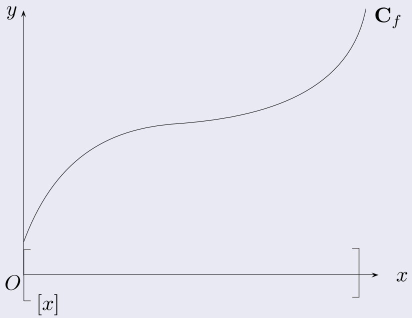
Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective} \Rightarrow f \text{ est } (\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective.}$$

Exemple



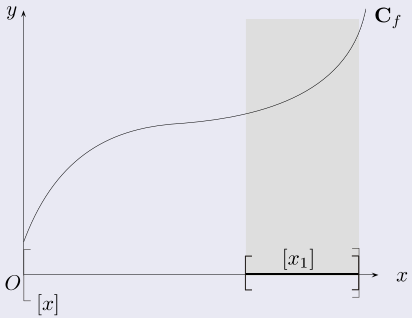
Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective} \ \Rightarrow f \text{ est } \left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}\right)\text{-injective.}$$

Exemple



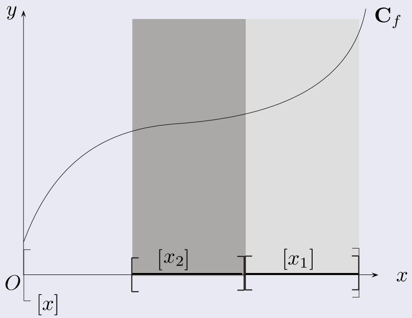
Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective } \Rightarrow f \text{ est } \left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}\right)\text{-injective.}$$

Exemple



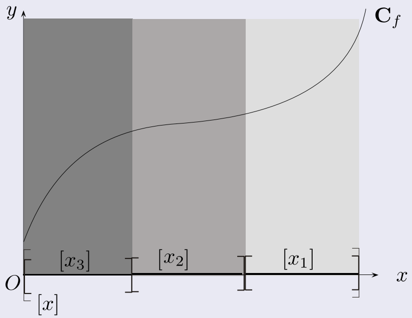
Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective } \Rightarrow f \text{ est } \left(\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A}\right)\text{-injective.}$$

Exemple



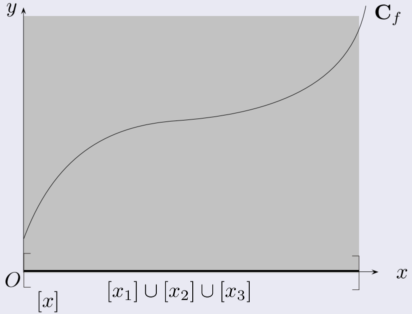
Injectivité partielle

Propriété de l'injectivité partielle

Soient une fonction $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p \subseteq \mathcal{A}$. On a

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, f \text{ est } (\mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective } \Rightarrow f \text{ est } (\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i, \mathcal{A})\text{-injective.}$$

Exemple



Plan de l'exposé

1. Injectivité partielle
    - Définition - Propriété
    - Condition d'injectivité partielle
2. Algorithme
3. Exemples
4. Application
5. Conclusion

Condition suffisante

Théorème (généralisé) des accroissements finis

Soit $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable. On a

$$\forall a, b \in [x], \exists J_f \in [Df([x])] \text{ tel que } f(b) - f(a) = J_f \cdot (b - a),$$

où $[Df([x])]$ est le pavé enveloppe de $Df([x])$.

Exemple

Condition suffisante

Théorème

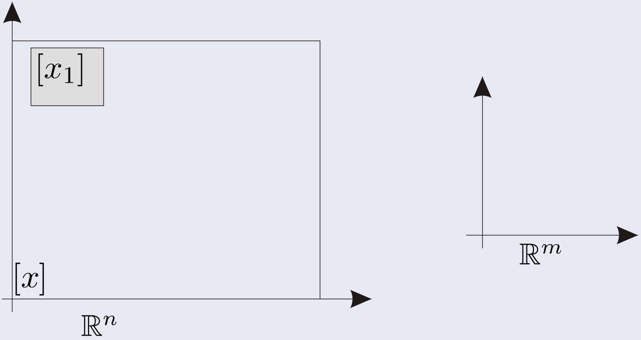
Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

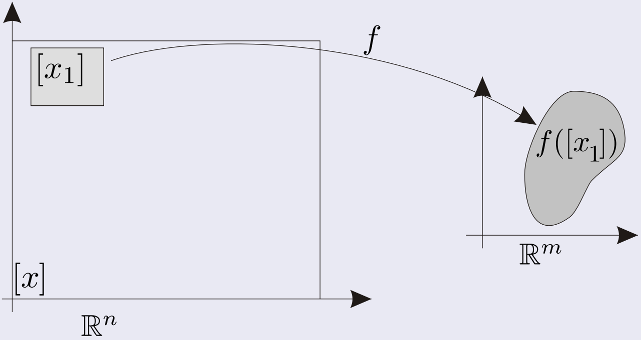


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$. Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

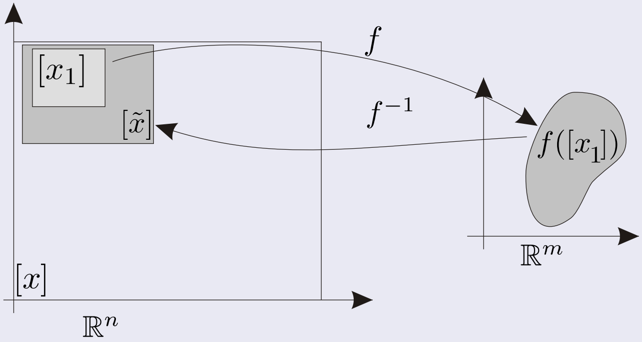


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$. Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

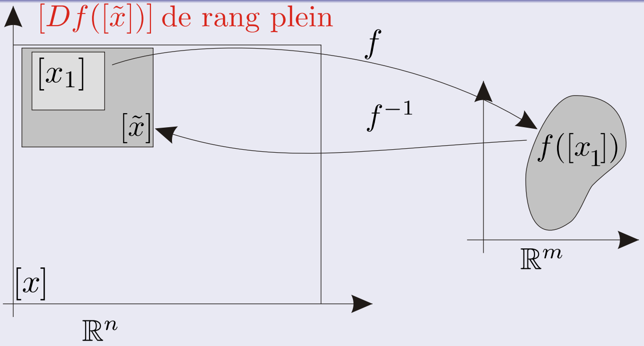


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

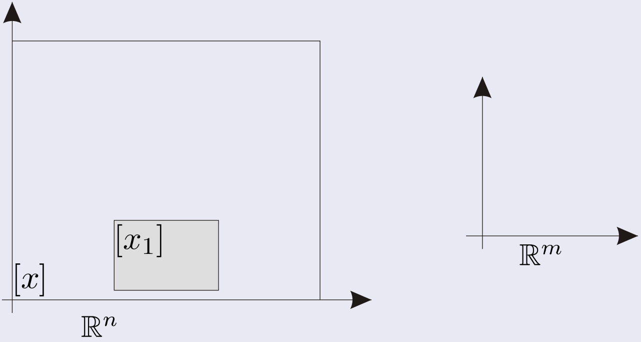


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$. Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

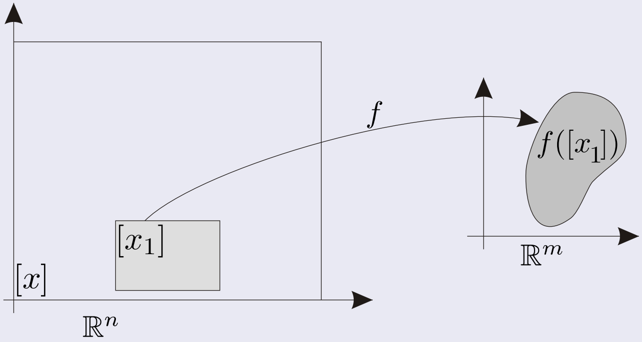


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$. Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

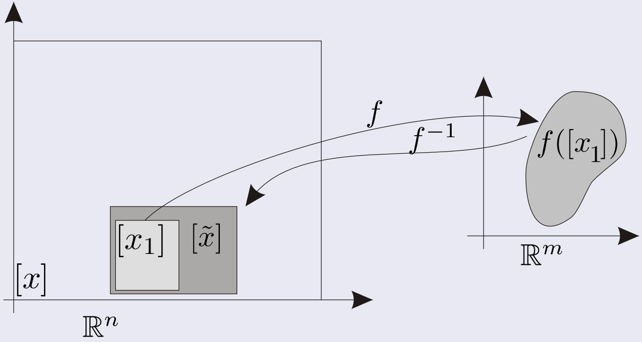


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple

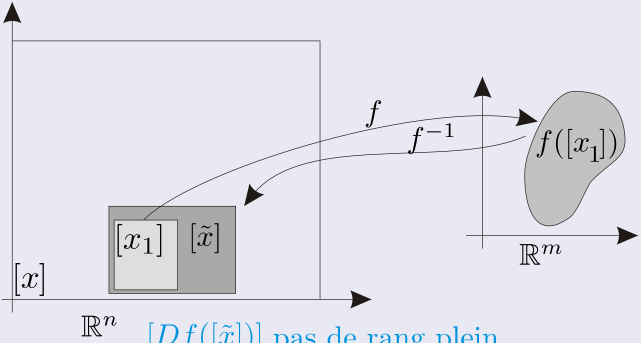


Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple



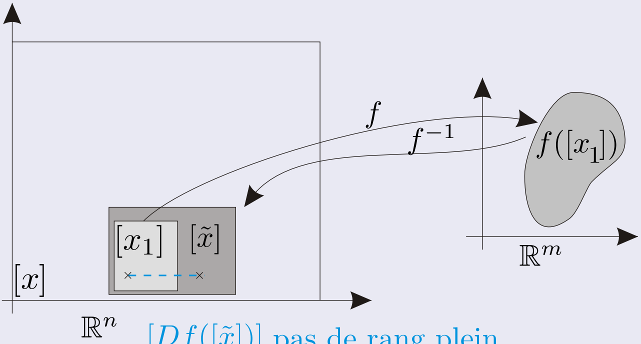
$[Df([\tilde{x}])]$ pas de rang plein

Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple



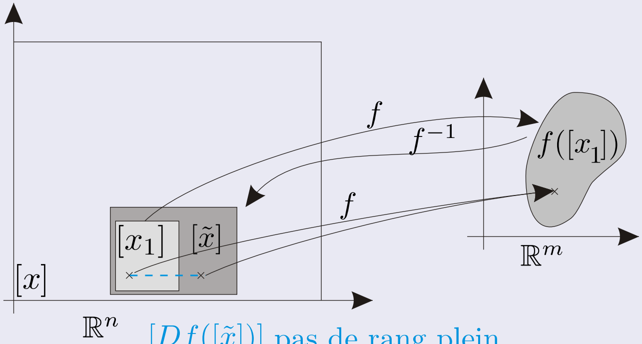
$[Df([\tilde{x}])]$ pas de rang plein

Condition suffisante

Théorème

Soient $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentiable, $[x_1] \subset [x]$ et $[\tilde{x}] \supset f^{-1}(f([x_1]))$.
Si $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein, alors f est $([x_1], [x])$-injective.

Exemple



$[Df([\tilde{x}])]$ pas de rang plein

Plan de l'exposé

Agorithme : ITVIA

Agorithme : Test l'injectivité d'une fonction $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

ITVIA se décompose en deux sous-algorithmes :

- Algorithme 1 teste si f est $([x_1], [x])$-injective.
- Algorithme 2 crée un découpage $\{[x_i]\}_i$ du pavé initial $[x]$ tel que, $\forall i$, f est $([x_i], [x])$-injective.

Agorithme : ITVIA

Algorithme 1 : InjectionPartielle

Input :	$f \in \mathcal{C}^1$ Boîte initiale $[x]$ Boîte $[x_1] \subset [x]$	Output :	boolean.

1 Calcul de $[\tilde{x}] = f^{-1}(f([x_1]))$

2 **If** $[Df([\tilde{x}])]$ est de rang plein **Then**

3 Return True

4 **Else** Return "False"

Agorithme : ITVIA

Algorithme 2 : ITVIA

Input : $f \in \mathcal{C}^1$, Boîte initiale $[x]$ | Output : boolean.

```
Initialisation : L := {[x]}.
Tant que L ≠ 0
        Pull [w] in L.
        If ( InjectionPartielle(f, [w], [x]) == False ) Then
                Bisect [w] into [w1] and [w2].
                Push [w1] and [w2] in L.
Return "f est une injection sur [x]".
```

Plan de l'exposé

Exemples

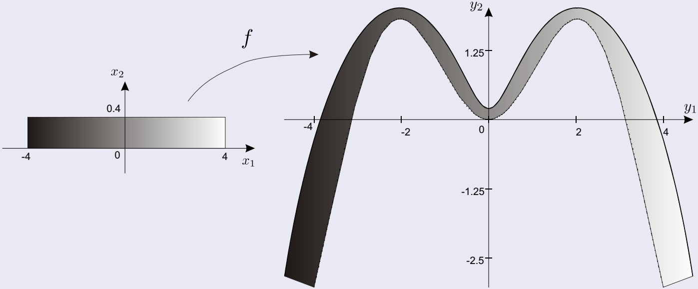
La fonction M

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-4,4] \times [0, \frac{4}{10}] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1 \cos(x_1) + \sin(x_1)) \\ x_1 \sin(x_1) + x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exemples

La fonction M

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-4,4] \times [0, \frac{4}{10}] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1 \cos(x_1) + \sin(x_1)) \\ x_1 \sin(x_1) + x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$



Exemples

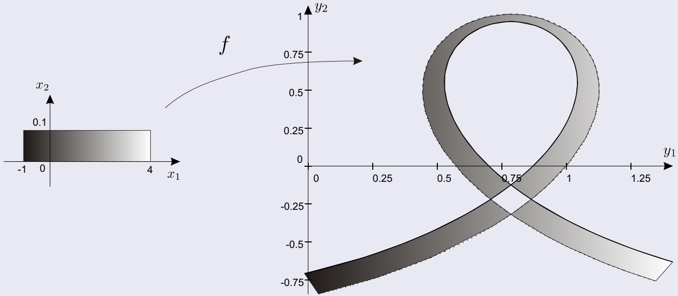
La fonction ruban

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,4] \times \left[0, \frac{1}{10}\right] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} + (1 - x_2)\cos(x_1) \\ (1 - x_2)\sin(x_1) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Exemples

La fonction ruban

$$f : \begin{cases} [-1,4] \times \left[0, \frac{1}{10}\right] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} + (1 - x_2)\cos(x_1) \\ (1 - x_2)\sin(x_1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

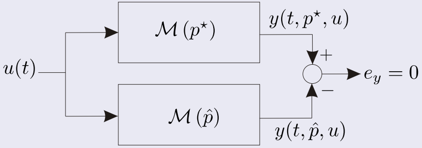


Plan de l'exposé

Application : Estimation de paramètres

Définition : Identifibilité structurelle

Soit $\mathcal{M}(\cdot)$ un système dont on souhaite estimer les paramètres $\mathbf{p} \in \mathcal{P} = \mathbb{R}^{\dim p}$. $\mathcal{M}$ est structurellement identifiable si, pour presque tout $p^\star \in \mathcal{P}$,

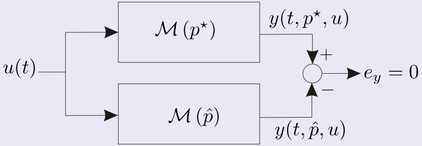


$$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star) \Rightarrow \hat{p} = p^\star.$$

Application : Estimation de paramètres

Définition : Identifibilité structurelle

Soit $\mathcal{M}(\cdot)$ un système dont on souhaite estimer les paramètres $\mathbf{p} \in \mathcal{P} = \mathbb{R}^{\dim p}$. $\mathcal{M}$ est structurellement identifiable si, pour presque tout $p^\star \in \mathcal{P}$,



$$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star) \Rightarrow \hat{p} = p^\star.$$

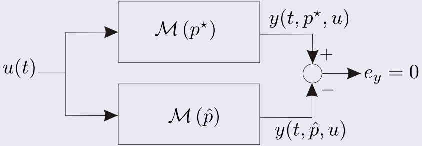
Approche Standard

1 Traduire l'égalité $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star)$ sous la forme $f(\hat{p}) = f(p^\star)$

Application : Estimation de paramètres

Définition : Identifibilité structurelle

Soit $\mathcal{M}(\cdot)$ un système dont on souhaite estimer les paramètres $\mathbf{p} \in \mathcal{P} = \mathbb{R}^{\dim p}$. $\mathcal{M}$ est structurellement identifiable si, pour presque tout $p^\star \in \mathcal{P}$,



$$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star) \Rightarrow \hat{p} = p^\star.$$

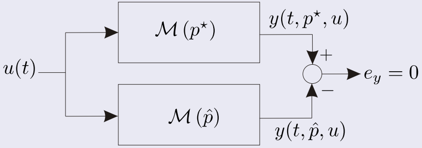
Approche Standard

1. Traduire l'égalité $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star)$ sous la forme $f(\hat{p}) = f(p^\star)$
2. Vérifier $f(\hat{p}) = f(p^\star) \Rightarrow \hat{p} = p^\star$.

Application : Estimation de paramètres

Définition : Identifibilité structurelle

Soit $\mathcal{M}(\cdot)$ un système dont on souhaite estimer les paramètres $\mathbf{p} \in \mathcal{P} = \mathbb{R}^{\dim p}$. $\mathcal{M}$ est structurellement identifiable si, pour presque tout $p^\star \in \mathcal{P}$,



$$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star) \Rightarrow \hat{p} = p^\star.$$

Approche Standard

1. Traduire l'égalité $\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star)$ sous la forme $f(\hat{p}) = f(p^\star)$
2. Vérifier que f est une injection sur $\mathcal{P}$.

Exemple en Estimation de paramètres

Considérons le système paramétré suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d}{dt}x & = & -(p_2 \sin p_1 - (p_1 - p_2 p_1) \cos p_1 + 1)x \\ & & +(p_1 + p_2 \cos p_1 + (p_1 - p_2 p_1) \sin p_1)u \\ y & = & x \end{array} \right.$$

de fonction de transfert

$$H(s,p) = \frac{p_1 + p_2 \cos p_1 + (p_1 - p_2 p_1) \sin p_1}{s + p_2 \sin p_1 - (p_1 - p_2 p_1) \cos p_1 + 1}$$

Identifiabilité Structurelle

$\mathcal{M}(\hat{p}) = \mathcal{M}(p^\star) \Leftrightarrow f(\hat{p}) = f(p^\star)$ avec

$$f(p) = \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \cos p_1 + (p_1 - p_2 p_1) \sin p_1 \\ p_2 \sin p_1 - (p_1 - p_2 p_1) \cos p_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

- Algorithme numérique vérifiant l'injectivité de $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

  Application en Estimation de paramètres.

Conclusion

- Algorithme numérique vérifiant l'injectivité de $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

  Application en Estimation de paramètres.

- Solveur disponible :
  http://www.istia.univ-angers.fr/~lagrange/

Conclusion

- Algorithme numérique vérifiant l'injectivité de $f : [x] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

  Application en Estimation de paramètres.

- Solveur disponible :
  `http://www.istia.univ-angers.fr/~lagrange/`

- Perspectives : Décomposer $[x]$ en sous-ensembles où la fonction f a un nombre fixé d'antécédents.