25ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images, Lyon, France, 8–11 sept. 2015.

Détection quantique optimale sur un qubit bruité

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, France.

Motivations pour le quantique en traitement de l'information

1) Quand, en poussant vers les limites physiques, on utilise des systèmes élémentaires (photons, électrons, atomes, nanotechnologies, . . .).

2) Pour bénéficier d'effets purement quantiques (parallélisme, intrication, . . .).

3) Domaine de recherche récent, riche et largement ouvert.

Le **traitement du signal**, qui s'intéresse à la fois
- aux dispositifs physiques pour l'observation et la mesure, et
- aux traitements et technologies de l'information associés,

est naturellement concerné par ces évolutions vers le quantique.

Dans cette perspective, nous abordons ici
une problématique de référence en traitement du signal,
la **détection de signaux dans le bruit**,
étendue dans un cadre quantique.

La **détection quantique** ou discrimination d'états quantiques,
et la prise en compte du **bruit quantique** comme la décohérence,
constituent des problématiques fondamentales pour l'information quantique,
et demeurent encore en cours d'investigation.

Ici nous adoptons ici une orientation “signal”, pour à la fois
- une présentation de la détection quantique, en la rapprochant de la classique,
- une présentation du bruit en quantique,
- un angle original en détection sur un système quantique bruité.

Détection optimale (en classique d'abord)

Jeu de données bruitées $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_N)^\top$ formé de N valeurs scalaires.

Deux hypothèses H_0 ou H_1 pour la constitution de $\vec{x}$:

H_0 : $\vec{x}$ distribué selon densité de proba. $p(\vec{x}|\mathrm{H}_0)$ avec prior P_0,

H_1 : $\vec{x}$ distribué selon densité de proba. $p(\vec{x}|\mathrm{H}_1)$ avec prior $P_1 = 1 - P_0$.

Pour à partir de $\vec{x}$ décider optimalement H_0 ou H_1 :

statistique de test $$T(\vec{x}) = P_1 p(\vec{x}|\mathrm{H}_1) - P_0 p(\vec{x}|\mathrm{H}_0) \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{\mathrm{H}_1}{\gtrless}} 0 , \qquad \text{(1C)}$$

minimise proba. $P_{\rm er} = \Pr\{\mathrm{H}_0 \text{ décidé} | \mathrm{H}_1 \text{ vrai}\} P_1 + \Pr\{\mathrm{H}_1 \text{ décidé} | \mathrm{H}_0 \text{ vrai}\} P_0$,

en atteignant proba. d'erreur minimale $$P_{\rm er}^{\rm min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \big|T(\vec{x})\big| d\vec{x} \, . \qquad \text{(2C)}$$

Détection optimale (en quantique maintenant) (1/2)

Un système quantique existant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_N$ de dim. N sur $\mathbb{C}$,

peut se trouver dans l'un ou l'autre de deux états quantiques, représentés par deux opérateurs densité (hermitiques positifs de trace unité sur $\mathcal{H}_N$)

ρ_0 avec prior P_0 (hypothèse H_0),

ρ_1 avec prior $P_1 = 1 - P_0$ (hypothèse H_1).

Par une mesure sur le système, décider s'il a été préparé dans l'état ρ_0 ou ρ_1.

En quantique, une mesure à deux issues est constituée par deux opérateurs positifs $\{\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1\}$ sur $\mathcal{H}_N$, vérifiant $\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 = \mathrm{I}_N$ (identité de $\mathcal{H}_N$).

Pour détecter optimalement, on cherche donc $\{\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1\}$ minimisant la probabilité d'erreur $P_{\mathrm{er}} = \Pr\{\mathrm{H}_0 \text{ décidé} | \mathrm{H}_1 \text{ vrai}\}P_1 + \Pr\{\mathrm{H}_1 \text{ décidé} | \mathrm{H}_0 \text{ vrai}\}P_0$.

Détection optimale (en quantique maintenant) (2/2)

Issue probabiliste de la mesure quantique

$$\Pr\{\mathrm{M}_k | \rho_j\} = \mathrm{tr}(\rho_j \mathrm{M}_k) , \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1.$$

d'où la probabilité d'erreur
$$\begin{aligned} P_{\mathrm{er}} &= \mathrm{tr}(\rho_0 \mathrm{M}_1)P_0 + \mathrm{tr}(\rho_1 \mathrm{M}_0)P_1 \\ &= \mathrm{tr}[\rho_0 \mathrm{M}_1 P_0 + \rho_1(\mathrm{I}_N - \mathrm{M}_1)P_1] \\ &= P_1 - \mathrm{tr}[(P_1\rho_1 - P_0\rho_0)\mathrm{M}_1] \\ &= P_1 - \mathrm{tr}(\mathrm{T}\mathrm{M}_1), \end{aligned}$$

avec l'opérateur (hermitique) de test $\mathrm{T} = P_1\rho_1 - P_0\rho_0$. (1Q)

Pour minimiser $P_{\mathrm{er}} = P_1 - \mathrm{tr}(\mathrm{T}\mathrm{M}_1)$, avec la forme diagonale
$\mathrm{T} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|$, on a $\mathrm{tr}(\mathrm{T}\mathrm{M}_1) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle\lambda_n|\mathrm{M}_1|\lambda_n\rangle$,
donnant $\mathrm{M}_1^{\mathrm{opt}} = \sum_{\lambda_n>0} |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| = \mathrm{I}_N - \mathrm{M}_0^{\mathrm{opt}}$ (project. sur s.e.v. des $\lambda_n > 0$), (1Q)

atteignant proba. minimale
$$P_{\mathrm{er}}^{\mathrm{min}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(|\mathrm{T}|\big) . \qquad (2Q)$$

C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press, 1976.

Détection sur un systéme quantique bruité

Dans la théorie de la détection quantique optimale,
ρ_0 et ρ_1 sont des états quantiques génériques.

On va maintenant considérer que ρ_0 et ρ_1 sont des états quantiques bruités, constitués par deux états quantiques initiaux (*signaling states*), ensuite affectés par un bruit quantique caractérisé, pour enfin devenir accessibles pour la détection.

$\Longrightarrow$ Optimisation plus poussée :

On va déterminer la paire d'états initiaux non bruités, pour maximiser la performance de la détection optimale opérant sur les états bruités par un bruit quantique caractérisé.

Action du bruit sur un système quantique

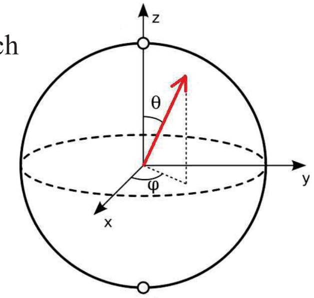
Transforme son état quantique ρ (un opérateur densité sur $\mathcal{H}_N$), en un état quantique bruité ρ' (un autre opérateur densité sur $\mathcal{H}_N$), selon une opération quantique linéaire préservant positivité et trace, pouvant s'écrire $\quad \rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_\ell \Lambda_\ell \rho \Lambda_\ell^\dagger$,

avec sur $\mathcal{H}_N$ les opérateurs de Kraus Λ_ℓ qui spécifient le bruit,
qui vérifient $\sum_\ell \Lambda_\ell^\dagger \Lambda_\ell = \mathrm{I}_N$,
et n'ont pas besoin d'être plus de N^2.

On particularise au cas du qubit, dans $\mathcal{H}_2$, (photon, électron, ...), requérant au plus $N^2 = 4$ opérateurs de Kraus Λ_ℓ sur $\mathcal{H}_2$, pour décrire en toute généralité le bruit affectant un qubit.

Détection optimale sur un qubit

L'état d'un qubit peut se paramétrer en représentation de Bloch



comme $\rho = \dfrac{1}{2}\Big(\mathrm{I}_2 + \vec{r}\,\vec{\sigma}\Big)$ avec $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ de $\|\vec{r}\| \leq 1$,

et les trois matrices 2×2 de Pauli $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z] = \vec{\sigma}$.

Pour détecter optimalement entre (ρ_0, ρ_1) l'opérateur

de test est $\mathrm{T} = P_1\rho_1 - P_0\rho_0 = \dfrac{1}{2}\Big[(P_1 - P_0)\mathrm{I}_2 + \vec{\tau}\,\vec{\sigma}\Big]$,

avec le vecteur de Bloch de test $\vec{\tau} = P_1\vec{r}_1 - P_0\vec{r}_0 = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top$,

La probabilité d'erreur du détecteur optimal $P_{\mathrm{er}}^{\min} = \dfrac{1}{2}\Big[1 - \mathrm{tr}(|\mathrm{T}|)\Big]$ devient alors

$$\begin{cases} P_{\mathrm{er}}^{\min} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \|\vec{\tau}\,\|\Big), & \text{si } \|\vec{\tau}\,\| \geq |P_1 - P_0|, \\ P_{\mathrm{er}}^{\min} = \min(P_0, P_1), & \text{si } \|\vec{\tau}\,\| < |P_1 - P_0|. \end{cases}$$

Détection sur un qubit bruité

L'action du bruit sur le qubit $\rho \longrightarrow \rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_\ell \Lambda_\ell \rho \Lambda_\ell^\dagger$,
est équivalente à une transformation affine du vecteur de Bloch de $\mathbb{R}^3$,
$\vec{r} \to \vec{r}\,' = \mathrm{A}\vec{r} + \vec{c}$,
avec A matrice 3×3 réelle et $\vec{c}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui caractérisent le bruit.

La détection à partir des états bruités $\Big(\rho_0' = \mathcal{N}(\rho_0), \rho_1' = \mathcal{N}(\rho_1)\Big)$ est contrôlée par le vecteur de Bloch de test transformé $\vec{\tau} \to \vec{\tau}\,' = \mathrm{A}\vec{\tau} + \vec{c}\,'$, avec $\vec{c}\,' = (P_1 - P_0)\vec{c}$,
avec pour performance

$$\begin{cases} P_{\mathrm{er}}^{\min} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \|\vec{\tau}\,'\|\Big), & \text{si } \|\vec{\tau}\,'\| \geq |P_1 - P_0|, \\ P_{\mathrm{er}}^{\min} = \min(P_0, P_1), & \text{si } \|\vec{\tau}\,'\| < |P_1 - P_0|. \end{cases}$$

Minimiser $P_{\mathrm{er}}^{\min} \Longleftrightarrow \max\limits_{\vec{\tau}} \|\vec{\tau}\,'\| = \|\mathrm{A}\vec{\tau} + \vec{c}\,'\|$ sous $\|\vec{\tau}\,\| = \|P_1\vec{r}_1 - P_0\vec{r}_0\| \leq 1$,
à $(\mathrm{A}, \vec{c}\,')$ fixés par le bruit et les priors (P_0, P_1).

La résolution générale est abordée dans

F. Chapeau-Blondeau; "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection"; *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, Aug. 2015.

Optimisation avec un bruit thermique

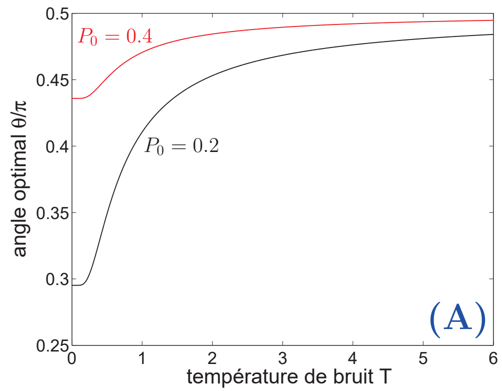
Décrit l'interaction du qubit avec un bain thermique à la température T.

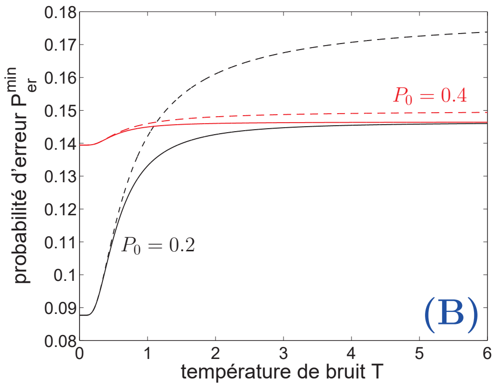
Caractérisé par $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix}$, et $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2p-1)\gamma \end{bmatrix}$,

amortissement $\gamma = 1 - e^{-t/T_1}$, et probabilité $p = \dfrac{\exp[-E_0/(k_BT)]}{\exp[-E_0/(k_BT)] + \exp[-E_1/(k_BT)]}$.

$\Longrightarrow$ La maximisation de $\|\vec{\tau}\,'\|$ est accomplie par $\vec{\tau} = \vec{\tau}^{\,\mathrm{opt}}$ défini par les composantes
$\tau_z = \tau_z^{\mathrm{opt}} = (P_1 - P_0)(2p-1)$, $\quad \tau_x^2 + \tau_y^2 = 1 - \tau_z^2$,
qui atteint le maximum $\|\vec{\tau}\,'\|_{\max} = \sqrt{1 - \gamma[1 - (P_1 - P_0)^2(2p-1)^2]}$,
conférant au détecteur optimal la plus faible probabilité d'erreur $P_{\mathrm{er}}^{\min} = P_{\mathrm{er}}^{\min,\mathrm{opt}}$.

Optimum fonction de la température de bruit





(A) Angle de coélévation optimal θ de $\vec{r}^{\,\mathrm{opt}}$ définissant la paire optimale d'états initiaux $(\rho_0^{\mathrm{opt}}, \rho_1^{\mathrm{opt}})$, et

(B) la probabilité d'erreur $P_{\mathrm{er}}^{\min} = P_{\mathrm{er}}^{\min,\mathrm{opt}}$ du détecteur fonctionnant avec cette paire optimale (trait plein) ; en tirets : la probabilité d'erreur $P_{\mathrm{er}}^{\min}$ du détecteur fonctionnant avec la paire fixée d'états initiaux (ρ_0, ρ_1) optimisée pour $T = 0$ seulement, et qui cesse d'être optimale pour $T > 0$.

Conclusion

Selon une approche "signal", on a présenté
- en parallèlisme avec la classique, la théorie de la détection quantique optimale,
- le bruit en quantique.

- On a déduit la paire d'états quantiques optimaux pour maximiser l'efficacité du détecteur quantique optimal opérant après l'action d'un bruit caractérisé.

On peut étendre
- à la détection sur des systèmes quantiques bruités de dimension supérieure à deux,
- à d'autres traitements quantiques à optimiser selon le bruit.

Traitement de l'information, et bruit, en quantique, ...
Traitement du signal quantique ...

Action du bruit sur un système quantique

En général, l'évolution de l'état ρ d'un système quantique de $\mathcal{H}_N$,
se produit via un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}_N$: $\rho \longrightarrow \rho' = \mathrm{U}\rho\mathrm{U}^\dagger$,

via équation de Schrödinger et hamiltonien H : $\mathrm{U}(t_0, t) = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{H}dt'\Big)$.

Le bruit provient de l'interaction avec un environnement non contrôlé (décohérence).

Au début de l'interaction le système et son environnement partent de l'état $\rho \otimes \rho_{\mathrm{env}}$,
puis évoluent selon $\rho \otimes \rho_{\mathrm{env}} \longrightarrow \mathrm{U}(\rho \otimes \rho_{\mathrm{env}})\mathrm{U}^\dagger$, et le système finit dans l'état obtenu
en prenant la trace partielle sur l'environnement : $\rho \longrightarrow \rho' = \mathrm{tr}_{\mathrm{env}}\Big[\mathrm{U}(\rho \otimes \rho_{\mathrm{env}})\mathrm{U}^\dagger\Big]$,

ce qui est équivalent à la forme de Kraus $\rho \longrightarrow \rho' = \sum_\ell \Lambda_\ell \rho \Lambda_\ell^\dagger$, avec sur $\mathcal{H}_N$ les opérateurs Λ_ℓ, qui vérifient $\sum_\ell \Lambda_\ell^\dagger \Lambda_\ell = \mathrm{I}_N$, et n'ont pas besoin d'être plus de N^2.

On particularise au cas du qubit, dans $\mathcal{H}_2$, (photon, électron, ...),
requérant au plus $N^2 = 4$ opérateurs de Kraus Λ_ℓ sur $\mathcal{H}_2$,
pour décrire en toute généralité le bruit affectant un qubit.