

Introduction

-La tendance des technologies de l'information à la **miniaturisation** mène à des **problématiques quantiques du traitement du signal et des images** [1].
-De plus le quantique apporte de **nouvelles ressources** pour le traitement du signal et des images, comme l'**intrication quantique** exploitée ici.

1 Une tâche d'estimation quantique

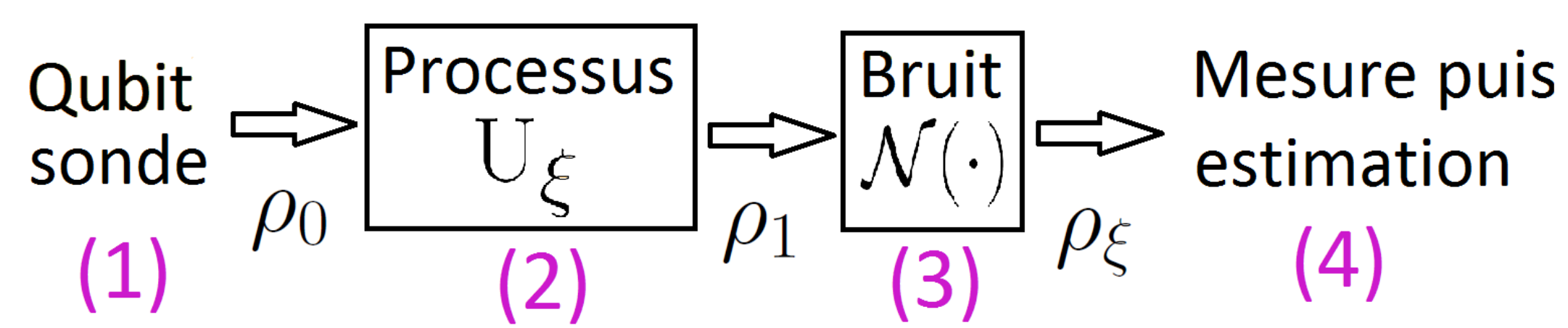


Fig. 1 : Protocole d'estimation paramétrique quantique avec 1 qubit unique.

2 Préparation du qubit sonde d'entrée : (1)

L'état d'un bit quantique est caractérisé par un vecteur. On choisit de préparer le qubit sonde assimilable à un signal d'entrée [2] dans l'état :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Processus quantique déphasant : (2)

Un processus quantique appliquant un déphasage ξ au qubit est représenté par l'opérateur unitaire :

$$U_\xi = |0\rangle\langle 0| + e^{i\xi}|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix}.$$

L'état du qubit sonde après action du processus U_ξ devient :

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{U_\xi} |\psi_1\rangle = U_\xi|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\xi} \end{bmatrix} \Rightarrow \rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\xi} \\ e^{i\xi} & 1 \end{bmatrix}.$$

4 Bruit quantique : (3)

Un bruit commun de référence [3] en quantique : le bruit dépolarisant.

\Rightarrow L'état du qubit est transformé en $\frac{I_2}{2}$ avec une probabilité p :

$$\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \xrightarrow{\mathcal{N}(\cdot)} \rho_\xi = \mathcal{N}(\rho_1) = (1-p)\rho_1 + p \frac{I_2}{2}.$$

5 Mesure quantique : (4)

Sur l'état bruité de sortie ρ_ξ de la Fig. 1 on réalise une **mesure quantique** dans la base orthonormale $\{|\psi_0\rangle, |\psi_0^\perp\rangle\}$. \Rightarrow Probabilités de projeter le qubit sur chacun des **2 vecteurs de base** :

$$\begin{aligned} \langle\psi_0|\rho_\xi|\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}[1 + (1-p)\cos(\xi)], \\ \langle\psi_0^\perp|\rho_\xi|\psi_0^\perp\rangle &= \frac{1}{2}[1 - (1-p)\cos(\xi)]. \end{aligned}$$

6 Estimation : (4)

Afin d'estimer le paramètre scalaire de déphasage ξ on répète N fois l'expérience de la Fig. 1, on a alors N_0 résultats projetant sur $|\psi_0\rangle$ donnant l'**estimateur du maximum de vraisemblance** :

$$\hat{\xi} = \arccos\left(\frac{1 - 2N_0 - N}{1 - p - N}\right).$$

7 Performance d'estimation :

La **performance d'estimation** est évaluée par l'erreur quadratique moyenne :

$$e_1 = \langle(\hat{\xi} - \xi)^2\rangle = \frac{1 - (1-p)^2 \cos^2(\xi)}{(1-p)^2 \sin^2(\xi)} \frac{1}{N}. \quad (1)$$

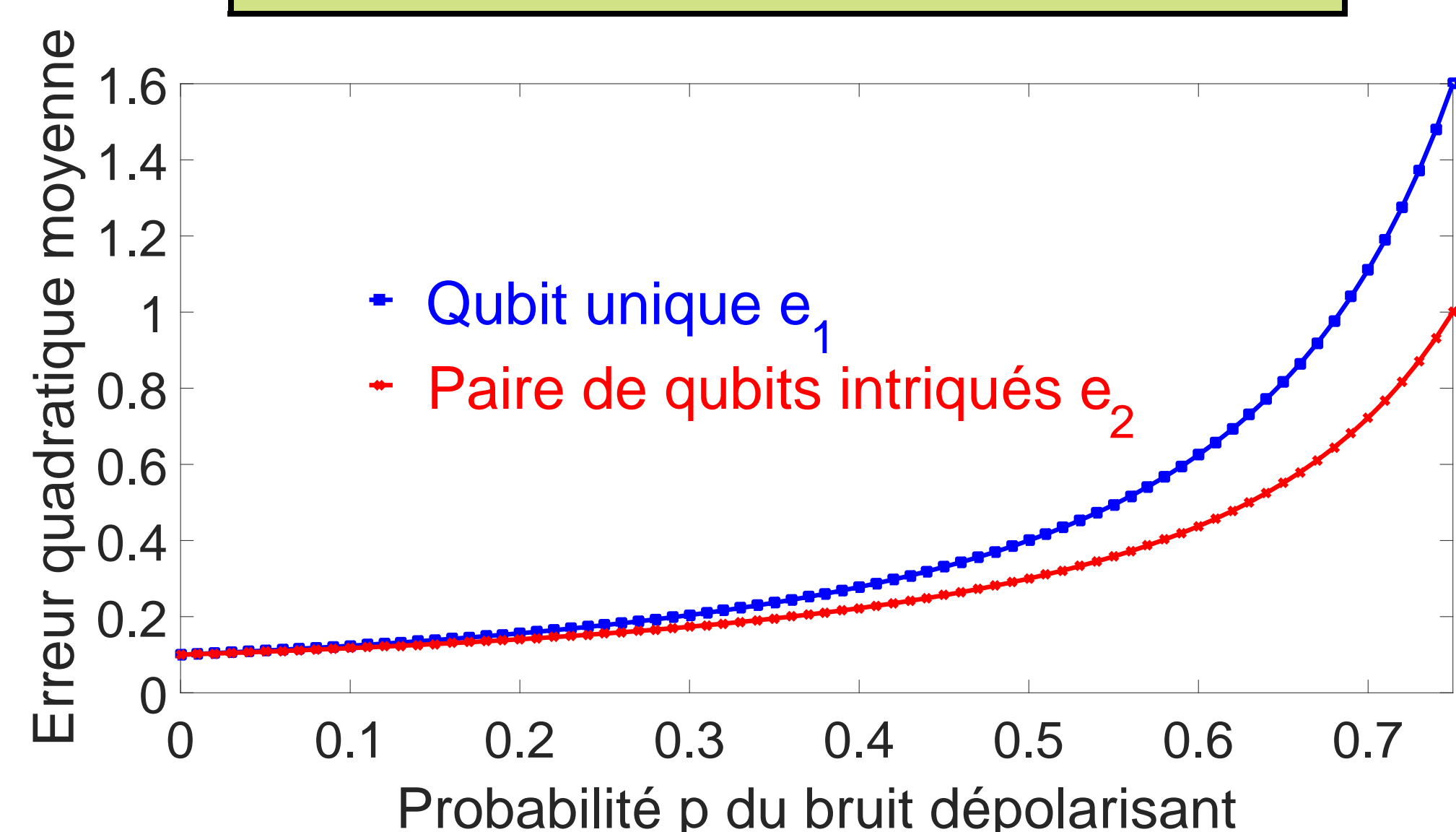


Fig. 2 : Erreurs quadratiques moyennes e_1 et e_2 des Eqs. (1) et (2) en fonction de la probabilité p du bruit dépolarisant.

La Fig. 2 montre qu'une augmentation du niveau de bruit p entraîne une augmentation de l'erreur quadratique moyenne d'estimation, ce qui est conforme à l'intuition.

8 Intrication quantique

Nous allons montrer que le phénomène d'intrication peut être exploité afin d'améliorer la performance d'estimation quantique.

Deux qubits intriqués sont liés, une action sur l'un affecte aussi le second.

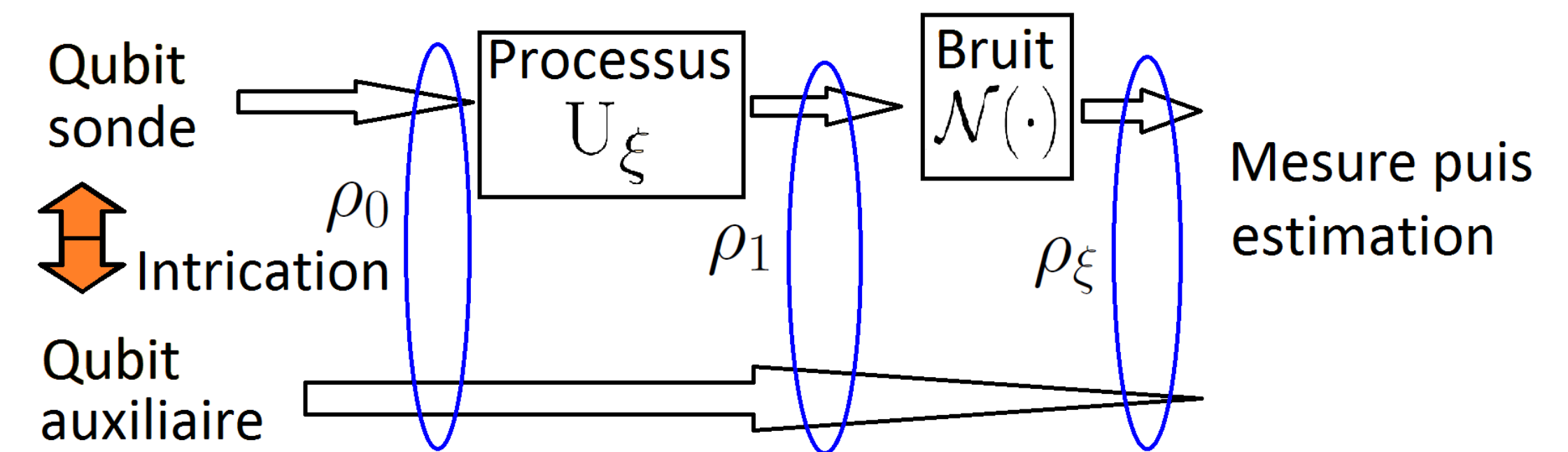


Fig. 3 : Protocole d'estimation avec une paire de qubits intriqués.

On choisit de préparer les **2 qubits sondes** dans l'état intriqué :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle \Rightarrow \rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|.$$

Sur l'état bruité de sortie ρ_ξ de la Fig. 3 on réalise une **mesure projective** dans la base orthonormale $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$.

\Rightarrow Probabilités de projeter la paire de qubits sur chacun des **4 vecteurs de base** :

$$\begin{aligned} \langle\beta_{00}|\rho_\xi|\beta_{00}\rangle &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{p}{2} + (1-p)\cos(\xi)\right], \\ \langle\beta_{01}|\rho_\xi|\beta_{01}\rangle &= \frac{p}{4}, \\ \langle\beta_{10}|\rho_\xi|\beta_{10}\rangle &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{p}{2} - (1-p)\cos(\xi)\right], \\ \langle\beta_{11}|\rho_\xi|\beta_{11}\rangle &= \frac{p}{4}. \end{aligned}$$

Avec N_{00} et N_{01} le nombre de résultats projetant respectivement sur $|\beta_{00}\rangle$ et $|\beta_{10}\rangle$, l'**estimateur du maximum de vraisemblance** est :

$$\hat{\xi} = \arccos\left(\frac{1 - p/2 - N_{00} - N_{10}}{1 - p - N_{00} + N_{10}}\right).$$

L'**erreur quadratique** avec le protocole à **une paire intriquée** de la Fig. 3 :

$$e_2 = \langle(\hat{\xi} - \xi)^2\rangle = \frac{(1-p/2)^2 - (1-p)^2 \cos^2(\xi)}{(1-p/2)(1-p)^2 \sin^2(\xi)} \frac{1}{N}. \quad (2)$$

9 Bénéfice du phénomène d'intrication

L'**erreur d'estimation** est réduite (voir Figs. 2 et 4) avec le protocole à **une paire intriquée** de la Fig. 3, quel que soit le niveau du bruit dépolarisant p ou le paramètre scalaire à estimer ξ .

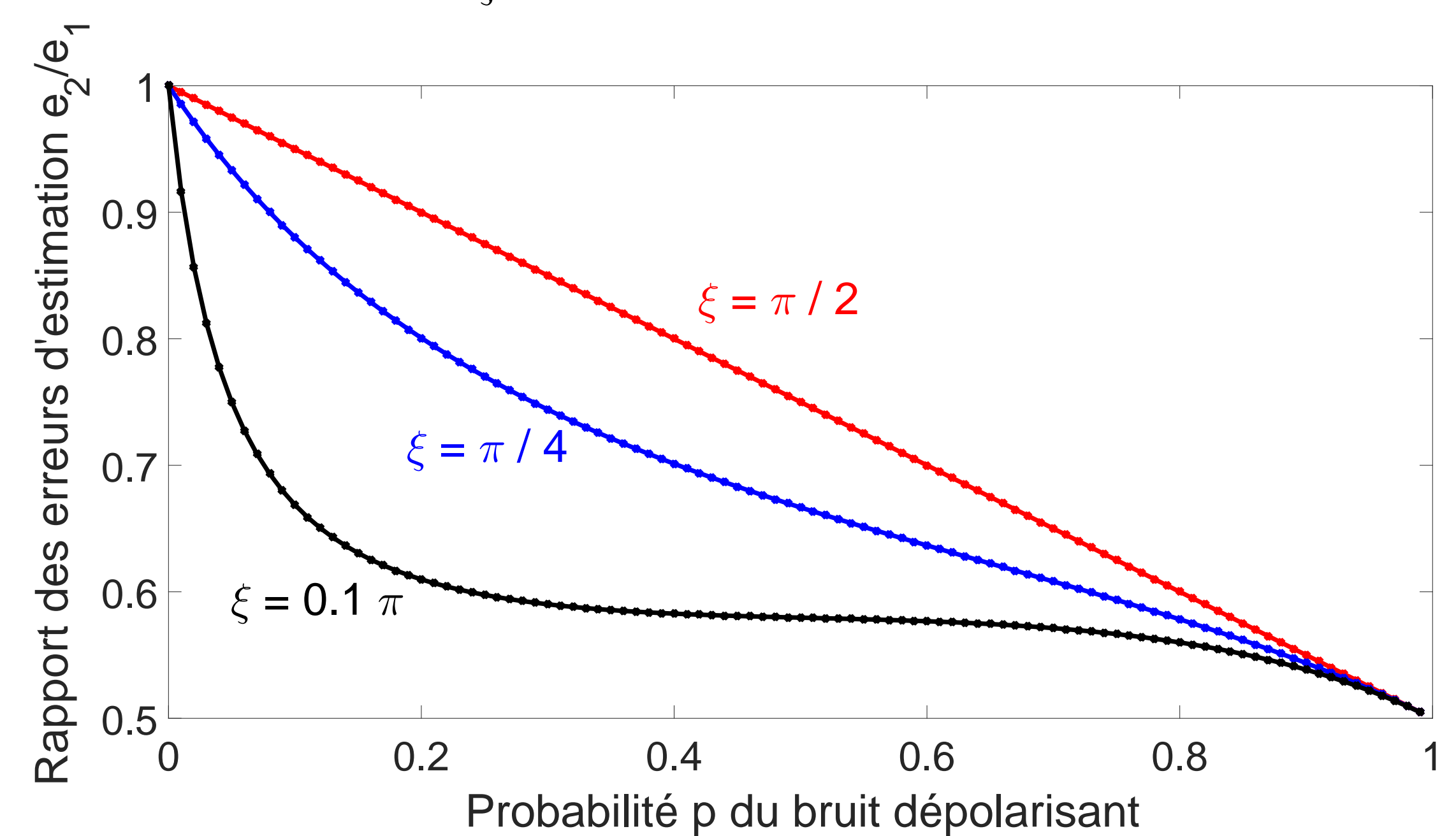


Fig. 4 : Rapport entre les erreurs quadratiques e_1 et e_2 des Eqs.(1) et (2).

Ainsi, comme illustré par les Figs. 2 et 4, bien que le qubit auxiliaire n'interagisse jamais avec le processus U_ξ à estimer, l'erreur d'estimation est inférieure avec le protocole à une paire de qubits intriqués de la Fig. 3. 😊

10 Conclusion

- Le phénomène d'**intrication** permet l'amélioration de l'opération d'**estimation quantique en présence de bruit** bien que le qubit auxiliaire n'interagisse ni avec le processus U_ξ à estimer ni avec le bruit.

- L'extension de cette **amélioration** à d'**autres bruits quantiques** a été vérifiée (bruit thermique).

[1] C. W. Helstrom, "Quantum Detection and Estimation Theory", *New York : Academic Press*, 1976.

[2] F. Chapeau-Blondeau, "Optimized probing states for qubit phase estimation with general quantum noise", *Physical Review A*, vol. 91, pp. 052310,1-13, 2015.

[3] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500-4510, 2015.