Transformée de Fourier et traitement du signal quantique

François Chapeau-Blondeau, Etienne Belin

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), Université d'Angers,

62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

XXVIIème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images – Lille (France) du 26 au 29 août 2019

université angers

I. Contexte : domaine de l'information quantique

Les avancées technologiques mènent à des phénomènes et propriétés spécifiquement quantiques, où le traitement du signal peut contribuer, par exemple sur des problématiques de détection [1] ou d'estimation [2] sur des signaux bruités opérant dans un cadre quantique. Ici pour illustration :

- Pour l'estimation d'une phase quantique, un protocole exploitant la **Transformée de Fourier (TF) quantique** est introduit.
- Via **l'intrication**, l'estimation atteint une performance inaccessible en classique avec une erreur quadratique décroissant en $1/N^2$ plutôt qu'en $1/N$.
- La performance d'estimation est aussi analysée en **présence de bruit ou décohérence quantique**.

II. Transformée de Fourier quantique

• Soit les états quantiques dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_N$ de dim. N sur $\mathbb{C}$. Les N vecteurs d'état $|j\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |N-1\rangle\}$ forment une base orthonormée de $\mathcal{H}_N$, avec pour **TF**

$$|j\rangle \longmapsto |\widetilde{\jmath}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\Big(i2\pi\frac{jk}{N}\Big)|k\rangle \ .$$

Les N vecteurs $\{|\widetilde{\jmath}\rangle\} = \{|\widetilde{0}\rangle, |\widetilde{1}\rangle, \cdots, |\widetilde{N-1}\rangle\}$ forment une autre base orthonormée de $\mathcal{H}_N$. Les deux bases sont reliées par $|\widetilde{\jmath}\rangle = \mathsf{U}_\mathsf{F}|j\rangle$ via la matrice $N\times N$ symétrique unitaire U_F de terme générique $\big[\exp(i2\pi jk/N)\big]/\sqrt{N}$.

• La **TF inverse** est définie par : $|\widetilde{\jmath}\rangle \longmapsto |j\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \exp\Big(-i2\pi\frac{jk}{N}\Big)|\widetilde{k}\rangle$,

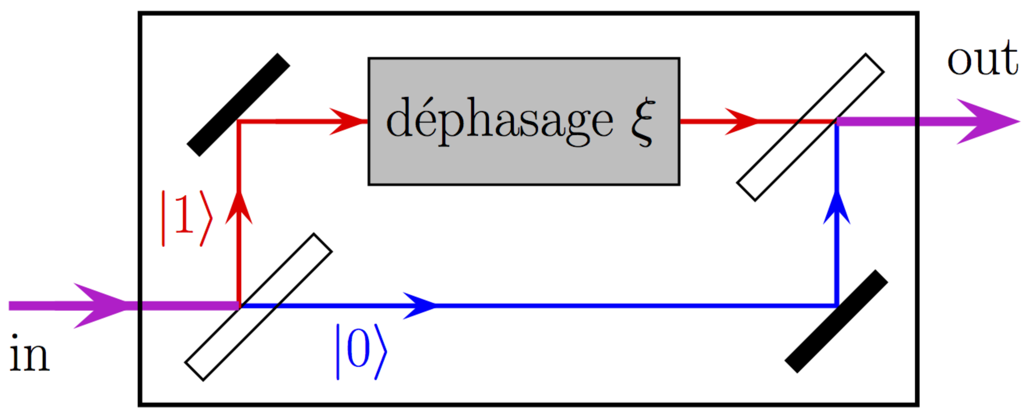
ou bien $|j\rangle = \mathsf{U}_\mathsf{F}^\dagger|\widetilde{\jmath}\rangle$ car $\mathsf{U}_\mathsf{F}^{-1} = \mathsf{U}_\mathsf{F}^\dagger$ la matrice adjointe.

• Les états quantiques sont souvent constitués à partir d'un systéme élémentaire : le **qubit** qui un système quantique à deux états de base (les deux états de polarisation d'un photon ou de spin d'un électron) existant dans $\mathcal{H}_2$ rapporté à la base orthonormée canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, avec les vecteurs d'état $|0\rangle$=$[1,0]^\top$ et $|1\rangle$=$[0,1]^\top$ de $\mathcal{H}_2$.

III. TF et estimation de phase quantique

• Considérons un processus quantique opérant sur le qubit, représenté par l'opérateur unitaire $\mathsf{U}_\xi = |0\rangle\langle 0| + e^{i2\pi\xi}|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\xi} \end{bmatrix}$.

• On veut alors estimer le déphasage $\xi \in [0,1[$ du processus U_ξ, déphasage qui peut être réalisé par un interféromètre optique, qui pour un photon à 2 états de polarisation laisse invariant un état de référence $|0\rangle$ et ajoute un déphasage sur l'autre état $|1\rangle$.



• **Signal d'excitation** : des états quantiques à $N-1$ qubits ($N \geq 2$), notés $|\overline{k}\rangle$, tels que $|\overline{k}\rangle = \overbrace{\underbrace{|0\rangle\cdots|0\rangle}\,\underbrace{|1\rangle\cdots|1\rangle}_{k}}^{N-1} = |\overbrace{0\cdots0\,\underbrace{1\cdots1}_{k}}^{N-1}\rangle$. Les N états $\{|\overline{k}\rangle\}$ forment une base orthonormée d'un sous-espace $\mathcal{H}'_N$ de dim. N de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{2^{N-1}} = \mathcal{H}_2^{\otimes(N-1)}$ de dim. 2^{N-1} des $N-1$ qubits. Les $N-1$ qubits préparés dans l'état conjoint $|\overline{k}\rangle$ sont successivement appliqués en entrée du processus U_ξ, on obtient en sortie un état à $N-1$ qubits résultant de la transformation $|\overline{k}\rangle \longmapsto \mathsf{U}_\xi^{\otimes(N-1)}|\overline{k}\rangle = \exp(i2\pi k\xi)|\overline{k}\rangle$.

• La **superposition quantique** permet de placer les $N-1$ qubits d'entrée dans un état superposé

$$|\psi_\text{in}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k|\overline{k}\rangle \ , \qquad (1)$$

avec les coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ normalisés par $\sum_{k=0}^{N-1}|a_k|^2 = 1$.

• Ce **signal d'excitation** $|\psi_\text{in}\rangle \in \mathcal{H}'_N$ produit, avec $j_\xi = N\xi$, la transformation entrée–sortie

$$|\psi_\text{in}\rangle \longmapsto \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\Big(i2\pi\frac{j_\xi k}{N}\Big)|\overline{k}\rangle = |\widetilde{\psi_\xi}\rangle \ , \qquad (2)$$

• Pour traiter **l'état de sortie** $|\widetilde{\psi_\xi}\rangle \in \mathcal{H}'_N$ pour estimer la phase $\xi \to$ **TF inverse**

$$\mathsf{U}_\mathsf{F}^\dagger|\widetilde{\psi_\xi}\rangle = |\psi_\xi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} a'_j|\overline{\jmath}\rangle \ , \qquad (3)$$

avec les coefficients $a'_j = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\Big(i2\pi\dfrac{(j_\xi - j)k}{N}\Big)$.

• Dans l'Éq. (1), avec une superposition d'entrée uniforme où les $a_k = 1/\sqrt{N}$, et une phase $\xi \in [0,1[$ inconnue donnant $j_\xi = N\xi = j_0$, on aurait $a'_j = \delta_{jj_0}$ et $|\psi_\xi\rangle = |\overline{\jmath}_0\rangle$ dans l'Éq. (3). **En mesurant $|\psi_\xi\rangle$ on a ainsi la possibilité de connaître précisément la phase $\xi = j_0/N$.**

• Dans le cas générique d'une phase ξ avec $j\xi = N\xi$ non entier, pour l'état $|\psi_\xi\rangle \in \mathcal{H}'_N$ à $N-1$ qubits de l'Éq. (3), on envisage une mesure quantique consistant à projeter l'état $|\psi_\xi\rangle$ dans la base orthonormée des N états $\{|\overline{k}\rangle\}$. On a alors la probabilité $P_j = |a'_j|^2$ de mesurer l'état $|\psi_\xi\rangle$ sur le vecteur de base $|\overline{\jmath}\rangle$ pour $j = 0$ à $N-1$.

• Pour un j donné par la mesure, on estime la phase par l'estimateur $\widehat{\xi} = j/N$ donnant
$\to$ erreur quadratique moyenne d'estimation $e^2(\widehat{\xi}) = \big\langle(\widehat{\xi} - \xi)^2\big\rangle = \sum_{j=0}^{N-1}(\xi - j/N)^2 P_j$,
$\to$ avec une périodicité selon la phase ξ, l'erreur alternative [4] $e_s^2(\widehat{\xi}) = \dfrac{1}{\pi^2}\big\langle\sin^2[\pi(\widehat{\xi} - \xi)]\big\rangle$.

• Cas de l'entrée uniforme avec $a_k = 1/\sqrt{N}$, on calcule $e_s^2(\widehat{\xi}) = \dfrac{1}{\pi^2 N}\sin^2(\pi N\xi)$.
On retrouve bien l'erreur nulle escomptée quand $N\xi = j_0$ entier. Quand la résolution N est grande, l'erreur e_s^2 est faible et $e^2(\widehat{\xi}) \approx e_s^2(\widehat{\xi}) \sim 1/N$.

• **Décroissance de l'erreur en $1/N$** en mesurant N qubits séparément $\to$ performance analogue en estimation statistique classique.

IV. Avec de l'intrication quantique

• Le signal d'excitation $|\psi_\text{in}\rangle$ à $N-1$ qubits : un **état intriqué**, et possibilité **d'optimiser l'intrication** via des a_k quelconques minimisant l'erreur d'estimation $e_s^2(\widehat{\xi})$.

On établit $e_s^2(\widehat{\xi}) = \dfrac{1}{2\pi^2}\Big(1 - \sum_{k=1}^{N-2}|a_k||a_{k+1}|\Big)$, avec minimisation pour des a_k tels que $a_k = \sqrt{\tfrac{2}{N}}\sin\big(\pi\tfrac{k}{N}\big)$. En évaluant les probabilités $P_j = |a'_j|^2$, on obtient **l'erreur** $e_s^2(\widehat{\xi}) = \dfrac{1}{\pi^2}\sin^2\big(\tfrac{\pi}{2N}\big)$. Quand N est grand $\to$ l'erreur e_s^2 faible et l'erreur quadratique moyenne d'estimation $e^2(\widehat{\xi}) \approx e_s^2(\widehat{\xi}) \approx 1/(4N^2)$.

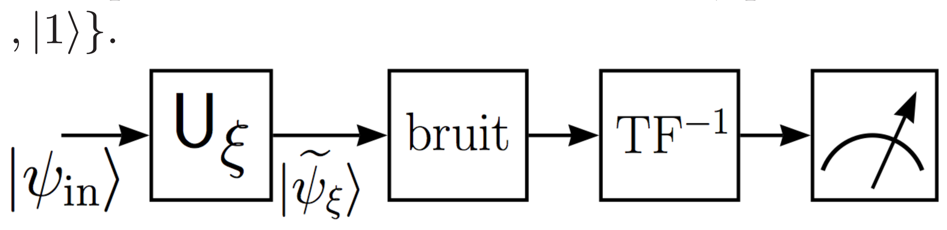
• **Décroissance de l'erreur en $1/N^2$ $\to$ bénéfice purement quantique dû à l'intrication** comme montrés dans [5, 6, 7], ou dans [8, 2] pour la résistance au bruit.

V. Avec du bruit ou décohérence quantique

• **Bruit quantique** : bruit de phase-flip renversant aléatoirement la phase quantique, formalisé avec l'opérateur unitaire de Pauli $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$.
Qubit **d'état pur initial** $|\phi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle \to$ **état mélangé**, équivalent à un ensemble statistique de deux états $\big\{(|\phi\rangle, 1-p), (\sigma_z|\phi\rangle, p)\big\}$, avec p la probabilité du bruit de phase-flip.

• Les statistiques de mesure peuvent être décrites par un opérateur densité $\rho = (1-p)|\phi\rangle\langle\phi| + p\sigma_z|\phi\rangle\langle\phi|\sigma_z^\dagger$ représentant le qubit bruité [3, 9]. La probabilité de mesurer le qubit bruité sur un état $|\phi'\rangle$ est donnée par $\langle\phi'|\rho|\phi'\rangle$.

• **Schéma du protocole de mesure** : le signal d'entrée $|\psi_\text{in}\rangle$ à $N-1$ qubits intriqués excite le processus U_ξ dont on veut estimer la phase ξ à partir du signal de sortie $|\widetilde{\psi_\xi}\rangle$ possiblement affecté par bruit de phase-flip. On réalise une TF inverse, puis on mesure chacun des $N-1$ qubits dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

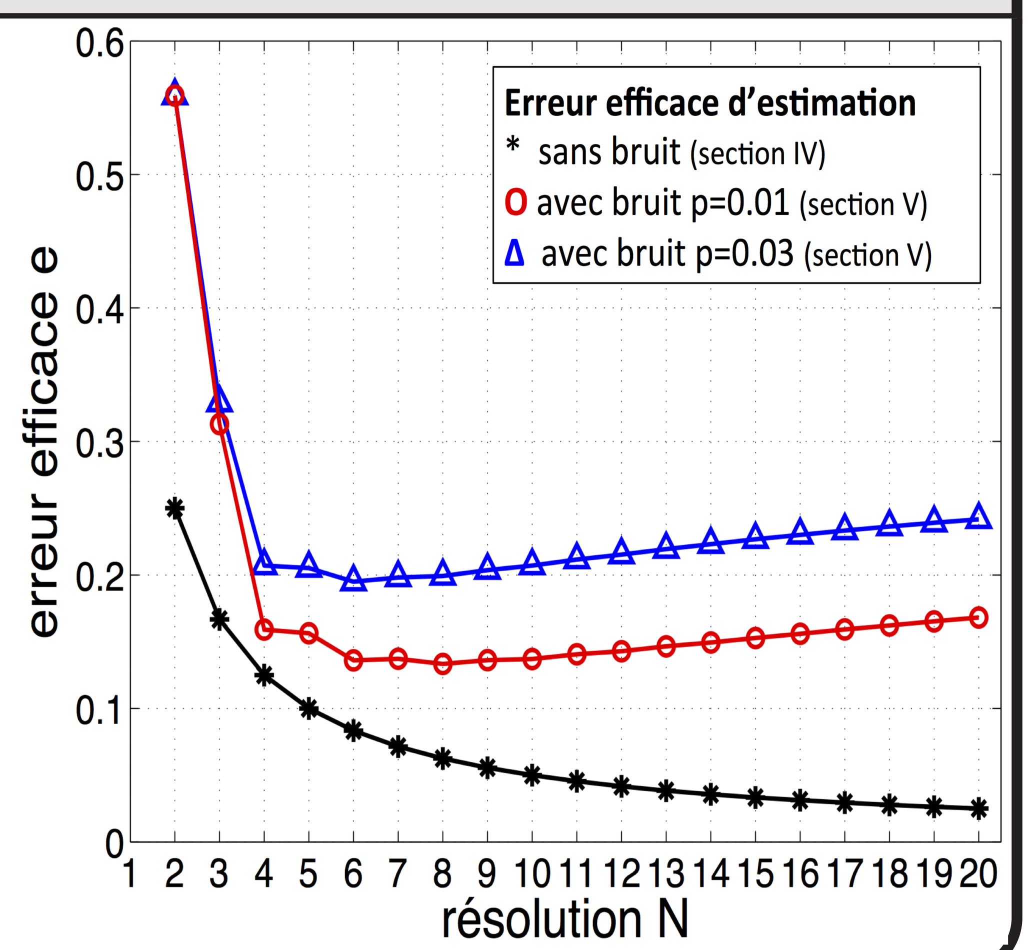


• On obtient **l'erreur** $e^2(\widehat{\xi}) = \big\langle(\widehat{\xi} - \xi)^2\big\rangle = \sum_{j=0}^{N-1}(\xi - j/N)^2 P_j$, avec la probabilité P_j de projeter sur l'état $|\overline{\jmath}\rangle$ telle que $P_j = \sum_{\ell=1}^{2^{N-1}}|c_j(\ell)|^2 P'_\ell$ (voir l'article).

• Effet du bruit quantique sur la performance

$\to$ **Sans bruit** : intrication uniformément toujours bénéfique.

$\to$ **Avec bruit** : propriété importante du signal intriqué. **Comportement non trivial avec un optimum** de la taille N (entre 6 et 8) pour l'intrication.
Ce type d'optimum de l'intrication en présence de bruit est aussi observé dans [5, 10, 11] pour d'autres scenarios de métrologie ou d'estimation.



Références bibliographiques

[1] F. Chapeau-Blondeau, "Détection quantique optimale sur un qubit bruité," *Actes du 25ème Colloque GRETSI*, Lyon, 8–11 sep. 2015.
[2] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, "Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l'intrication," *Actes du 26ème Colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, 5–8 sep. 2017.
[3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
[4] Z. Ji, G. Wang, R. Duan, Y. Feng, M. Ying, "Parameter estimation of quantum channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 5172–5185, 2008.
[5] S. F. Huelga, C. Macchiavello, T. Pellizzari, A. K. Ekert, M. B. Plenio, J. I. Cirac, "Improvement of frequency standards with quantum entanglement," *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 3865–3868, 1997.
[6] G. M. D'Ariano, P. Lo Presti, M. G. A. Paris, "Using entanglement improves the precision of quantum measurements," *Physical Review Letters*, vol. 87, pp. 270404,1–4, 2001.
[7] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, "Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit," *Science*, vol. 306, pp. 1330–1336, 2004.
[8] F. Chapeau-Blondeau, "Entanglement-assisted quantum parameter estimation from a noisy qubit pair: A Fisher information analysis," *Physics Letters A*, vol. 381, pp. 1369–1378, 2017.
[9] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
[10] P. Kok, J. Dunningham, J. F. Ralph, "Role of entanglement in calibrating optical quantum gyroscopes," *Physical Review A*, vol. 97, pp. 012326,1–10, 2017.
[11] F. Chapeau-Blondeau, "Optimized entanglement for quantum parameter estimation from noisy qubits," *International Journal of Quantum Information*, vol. 16, pp. 1850056,1–25, 2018.