Optimisation de la transmission d'information sur un canal quantique via le calcul par intervalles

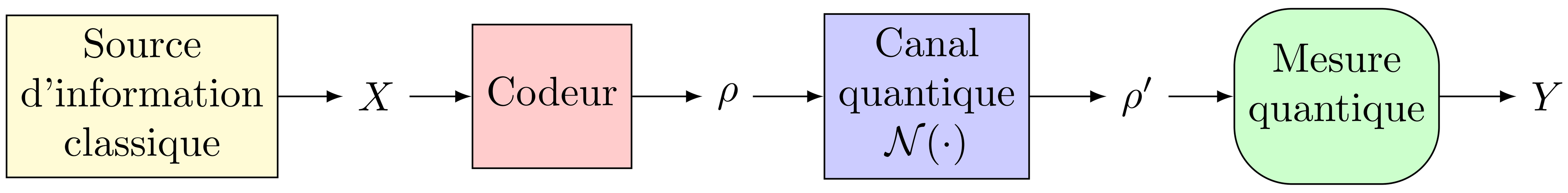
Nicolas Delanoue & François Chapeau-Blondeau

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

Résumé

La transmission d'information sur un **canal quantique** soulève des problèmes d'optimisation spécifiques, non encore universellement résolus. Nous considérons ici l'application de méthodes d'**optimisation globale** basées sur le calcul par intervalles, pour la maximisation de **critères informationnels** caractérisant la performance d'un canal quantique de communication, en insistant spécialement sur leur apport et potentiel spécifiques.

1. Transmission d'information sur un canal quantique



- Une **source d'information classique** émet un symbole discret X prenant les valeurs x_j avec les probabilités a priori $p_j = \Pr\{X = x_j\}$.
- Chaque symbole x_j est **encodé** par un état quantique ρ_j.
- Le **canal quantique** réalise une transformation d'un opérateur densité d'entrée ρ en un opérateur densité de sortie $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$.
- En sortie du canal, on réalise une **mesure quantique** via un détecteur qui produit un symbole Y prenant les valeurs y_k.

2. Modélisation du canal quantique

- Chaque signal quantique ρ représente un opérateur densité, *i.e.* un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ positif et de trace unité, avec $\mathcal{H}_N$ l'espace de Hilbert complexe des états quantiques de dimension N.
- Le canal quantique transforme le signal quantique d'entrée ρ en un signal quantique de sortie $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ selon
$$\rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_\ell \Lambda_\ell \rho \Lambda_\ell^\dagger, \tag{1}$$
où les opérateurs de Kraus $\{\Lambda_\ell\}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ définissent le modèle de canal [1,2].
- En sortie, la mesure quantique (généralisée ou "POVM") est définie par K opérateurs positifs $\mathsf{E}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$, pour $k = 1$ à K, qui sont tenus de décomposer l'identité de $\mathcal{H}_N$, et qui établissent les probabilités conditionnelles du décodage en sortie :
$$\Pr\{Y = y_k | X = x_j\} = \mathrm{tr}(\rho_j' \mathsf{E}_k). \tag{2}$$

3. Critère de performance

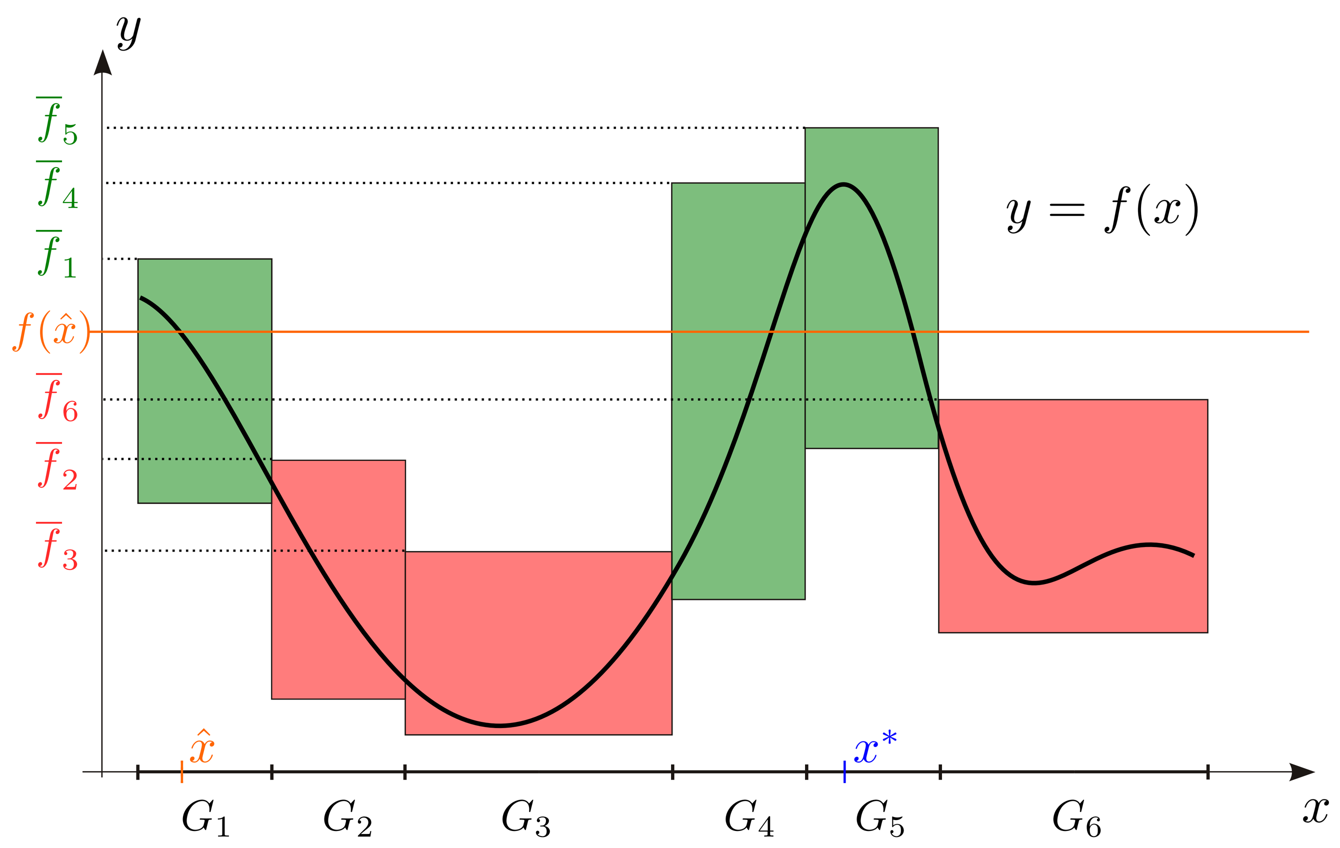
À partir des probabilités p_j et de l'Éq (2), la transmission d'information entrée-sortie $X \to Y$, peut être caractérisée par l'**information mutuelle classique**
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X), \tag{3}$$
où $H(\cdot)$ est l'entropie de Shannon. Différents problèmes d'optimisation intéressants résultent alors. Par exemple, pour un ensemble d'encodage $\{p_j, \rho_j\}$ fixé en entrée, il est utile de rechercher le meilleur détecteur, *i.e.* l'ensemble d'opérateurs de mesure $\{\mathsf{E}_k\}$ qui maximisent l'information mutuelle $I(X;Y)$ de l'Éq. (3) aussi appelée l'**information accessible** [1,2] :
$$I_{\mathrm{acc}}(X;Y) = \sup_{\{\mathsf{E}_k\}} I(X;Y). \tag{4}$$

4. Optimisation globale via le calcul par intervalles

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, le calcul par intervalles [5,6] permet de calculer la **solution optimale globale** d'un problème d'optimisation comme
$$\sup_{x \in G} f(x), \tag{5}$$
Cette technique, dérivant d'une méthode de *branch and bound*, est résumée par le théorème 1. Les bornes sont algorithmiquement calculées via l'arithmétique des intervalles.

Théorème 1

Soit $\mathcal{G} = \{G_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de G et $\{\overline{f}_j\}_{j \in J}$ des réels tel que $\forall x \in G_j, f(x) \leq \overline{f}_j$, $\hat{x} \in G$ un candidat et x^* une solution optimale de (5) alors $\overline{f}_k \leq f(\hat{x}) \Rightarrow x^* \notin G_k$.



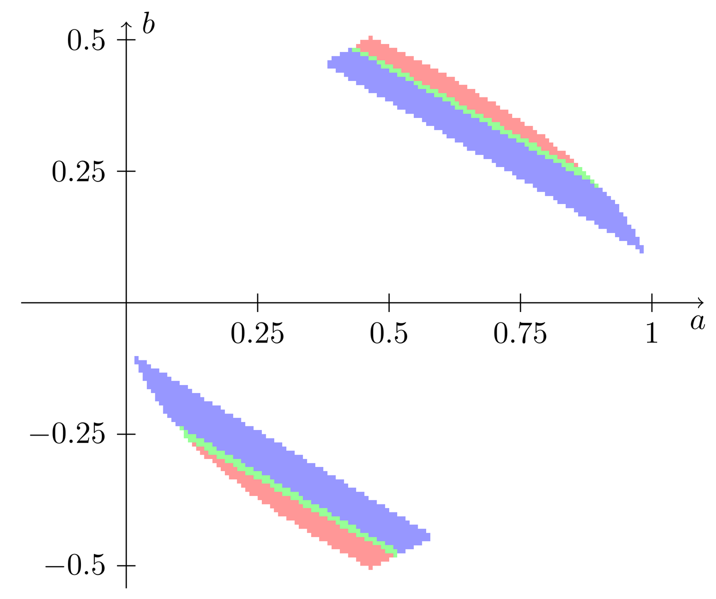
5. Un détecteur quantique optimal

La conception d'un **détecteur quantique optimal** va consister ici à résoudre le problème d'optimisation décrit par l'Éq. (4) avec une méthode présentée dans la section 4.
On considère l'instance suivante :

- La source de d'information classique émet l'un des symboles x_1 ou x_2 avec les probabilités a priori $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.9$.
- On code chacun des symboles x_1 et x_2 respectivement avec les opérateurs densité $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ en posant $|\psi_1\rangle = \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{15}}{4}|1\rangle$, $|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|1\rangle$.
- Le canal de transmission de l'Éq. (1) est ici pris comme l'identité.
- Le problème d'optimisation consiste à trouver les deux opérateurs de mesure optimaux E_1 et E_2 maximisant l'information mutuelle entrée-sortie.

Résultat de l'optimisation

- Les deux opérateurs de mesure obtenus après l'exécution d'une méthode d'optimisation globale donne comme solution $\mathsf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0.446 & -0.497 \\ -0.497 & 0.554 \end{bmatrix}$ et $\mathsf{E}_2 = \mathrm{Id} - \mathsf{E}_1$.
- La valeur de l'information mutuelle est de $0,0957$ Sh pour cette solution.
- De plus, on certifie que le gap entre cette valeur numérique et la valeur optimale $\sup_{\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2} I(X;Y)$ est inférieur à 10^{-4} (en 20 secondes de temps CPU).
- Caractération ensembliste de l'ensemble des opérateurs $\mathsf{E}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0.535 \end{bmatrix}$ de mesure dépassant une valeur donnée de l'information mutuelle



Dans le plan (a, b), les trois zones (bleu, rouge et verte) caractérisent l'ensemble des solutions admissibles E_1 pour lesquelles l'information mutuelle est potentiellement supérieure à 0.05, 0.08 et 0.09, respectivement.

6. Conclusion et perspectives

- Comparaison possible à [4] où les auteurs minimisent la probabilité d'erreur de détection.
- Étendre aux cas où $\mathcal{N}(\cdot)$ est différent de l'identité (*i.e.* aux canaux bruités).
- Recherche de l'ensemble d'encodage $\{p_j, \rho_j\}$ en entrée accomplissant la maximisation de l'information de Holevo [1,3] :
$$\chi_{\max} = \sup_{\{p_j, \rho_j\}} \chi\big(\{p_j, \rho_j'\}\big) \,. \tag{6}$$

Références

[1] M. M. Wilde, "Quantum Information Theory", *Cambridge: Cambridge University Press*, 2017.

[2] C. H. Bennett, P. Shor, "Quantum information theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 2724-2742, 1998.

[3] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500-4510, 2015.

[4] Y. C. Eldar, A. Megretski, G. C. Verghese, "Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, pp. 1007-1012, 2003.

[5] N. Delanoue, S. Lagrange. "A numerical approach to compute the topology of the apparent contour of a smooth mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$". *Journal of Computational and Applied Mathematics.* vol. 271 pp. 267–284, 2014.

[6] R. E. Moore, "Interval Analysis", *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, NJ, 1966