Résumé : Conditionnement d'une matrice, erreur relative, amplification d'erreur.

L'énoncé de ce TP se trouve sur
`http://perso-laris.univ-angers.fr/~delanoue/istia/calcul_numerique/td3.pdf`

Exercice 1 (Influence des erreurs d'arrondi sur la résolution d'un système linéaire)
On cherche à résoudre le système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

1. Calculer avec `Matlab` la solution exacte du système. On utilisera la commande `A\b`. Quelle est la différence entre l'instruction `A\b` et l'instruction `inv(A)*b` ?
2. Calculer la solution du système perturbé $(A + \Delta A)y = b$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

3. On note $\Delta x = y - x$. Déduisez-en le coeffcient d'amplification d'erreur $\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x+\Delta x\|_2} \times \frac{\|A\|_2}{\|\Delta A\|_2}$. On pourra utiliser la fonction `norm`. Que remarquez-vous ?
4. Calculer la solution du système perturbé $Az = b + \delta b$ avec

$$\delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

5. On note $\delta x = z - x$. En déduire le coefficient d'amplification d'erreur $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\delta b\|_2}$. Que remarquez-vous ?
6. Calculez le conditionnement de la matrice A en norme 2, $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$. Retrouvez ce résultat avec la fonction `cond`.
7. Calculer les valeurs propres de la matrice A. On note par $\lambda_{\max}$ la plus grande d'entre elles en valeur absolue et $\lambda_{\min}$ la plus petite. Comparez le rapport $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ avec le conditionnement.
8. Reprenez les questions précédentes en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ à la place de la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 2 (Erreurs relatives et conditionnement)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le conditionnement de la matrice A en norme 1 $\mathrm{cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1$
2. On considère les deux systèmes suivants :

$$Ax = b \text{ et } A(x + \delta x) = b + \delta b, \text{ avec } b = (100, 1)^t \text{ et } b + \delta b(100, 0)^t$$

Calculez la variation relative $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$ de la solution et celle du second membre $\frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}$. Quel est le facteur d'amplification de l'erreur ?

Exercice 3 (Déterminant et conditionnement)

1. Calculez en fonction de n le déterminant et le conditionnement de la matrice carré A d'ordre n définie par `diag(1, 10, ..., 10)`.
2. De même calculez en fonction de n le déterminant et le conditionnement de la matrice carré B tridiagonale avec des 2 sur la diagonale et d0es -1 sur la sur et sous diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Quand concluez-vous ? Y a-t-il un lien entre le déterminant et le conditionnement ?

Exercice 4
On cherche à déceler des anomalies géologiques à l'intérieur de la terre à partir de mesures de pesanteur faites à sa surface. La méthode consiste à calculer la densité x d'un matériau situé à une profondeur de y unité, mettons $y = 1$, à partir des mesures des forces de pesanteur verticales b en surface ($y = 0$). En dimension un il s'agit donc d'estimer une fonction linéique $x(s)$ à partir d'une fonction linéique $b(t)$ où s, t sont des abscisses horizontales. La suite donne la relation qui lie b et x. Pour la modélisation, on suppose que le reste du monde a une masse négligeable. Selon la loi de Newton pour la gravité, la contribution d'un élément terrestre de longueur ds positionné en s (à la profondeur $y = 1$) aux forces de pesanteur en t (à la surface $y = 0$) est :

$$db = G\frac{\sin\theta(s)x(s)}{r^2}ds \tag{1}$$

où G est une constante gravitationnelle, et r la distance qui sépare les deux points $(s, 1)$ et $(t, 0)$. Avec $\sin\theta = \frac{1}{r}$ et $r = \sqrt{1 + (t-s)^2}$, on en déduit que

$$b(t) = G\int_0^1 \frac{1}{(1 + (t-s)^2)^{3/2}} x(s)ds$$

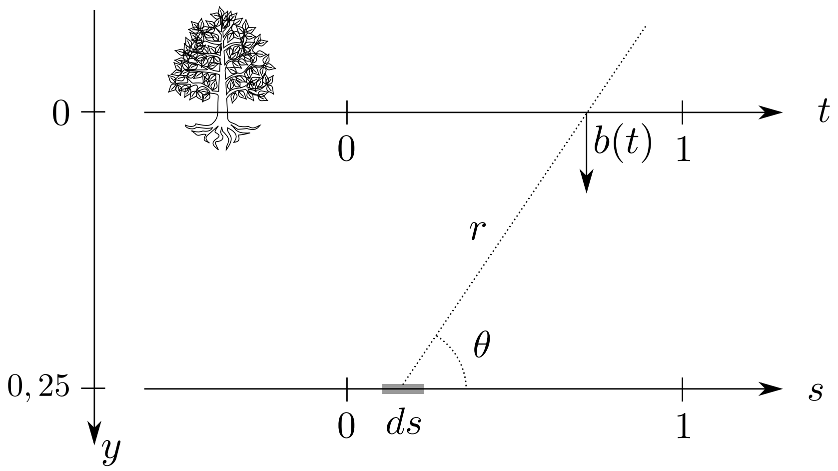

Figure 1 – Illustration graphique.

1. Montrez que b dépend linéairement de x.
2. Discrétisez l'équation (1) en utilisant la méthode des rectangles (formule du point milieu) pour appocher l'intégrale en divisant l'intervalle $[0, 1]$ en n morceaux. Ceci vous amène naturellement à une équation de la forme $A_nX_n = B_n$. Que représentent B_n et X_n ? Donnez les expressions approchées $x_n(s)$ et $b_n(t)$ de $x(s)$ et $b(t)$ respectivement.
3. On suppose que b est donné par $b(t) = \sin(\pi t) + 0.5\sin(2\pi t)$. Trouvez avec Matlab une solution approchée de Gx (on a incorporé la constante G dans l'inconnue) pour $n = 30$.
4. Soit C_n le conditionnement du système $A_nX_n = B_n$ et soit $\Delta_n = \|A_nX_n - B_n\|_1$ l'erreur commise en sortie. Calculez avec Matlab C_{30}, Δ_{30}.
5. Même question avec $n = 40, n = 70$. Conclusion ?